

# *Probabilités extraites du prix des options Intervalles de confiance et séries à échéance constante*

---

*William Melick et Charles Thomas*

## **Introduction**

Les opérateurs des marchés et les chercheurs se servent depuis toujours de l'information véhiculée par les prix des actifs financiers pour analyser l'évolution économique et financière. L'expansion des marchés financiers et l'intensification des activités qui s'y déroulent, depuis une trentaine d'années, ont accru le volume et l'éventail des renseignements disponibles, tandis que la baisse du coût des calculs permettait de mettre en œuvre des techniques et des modèles plus raffinés. De plus, l'essor rapide des produits dérivés a eu pour effet d'élargir encore l'information qui peut être extraite des prix observés sur les marchés. Par exemple, plusieurs techniques ont été mises au point récemment afin d'extraire du prix des options les densités de probabilité relatives aux actifs sous-jacents (voir Melick et Thomas, 1997, ainsi que les auteurs qui y sont cités).

Nous présentons ici nos premières conclusions sur deux questions liées à l'extraction des densités de probabilité. En premier lieu, un grand nombre des options faisant l'objet d'une forte activité sont cotées en bourse et portent sur des contrats qui expirent à des dates déterminées. Il en résulte que les statistiques sommaires (p. ex. les moments ou les probabilités d'être au-dessus ou au-dessous d'un prix déterminé) qui sont calculées à partir des densités de probabilité relatives à ces options dépendent de l'échéance de ces dernières. En d'autres termes, les statistiques sommaires ont une valeur limitée en ce sens que le nombre d'observations correspond au nombre de jours durant lesquels l'option se négocie (souvent au maximum un an) et elles ne sont pas comparables car chacune s'applique à une échéance

légèrement différente. De ce fait, il est impossible de procéder à des comparaisons de statistiques sommaires dans le temps ou encore de les utiliser dans des régressions temporelles. En second lieu, les estimations effectuées à partir des densités de probabilité sont essentiellement ponctuelles. On ne s'est guère préoccupé jusqu'ici de chiffrer le degré d'incertitude qui les caractérise.

Voici le plan de notre étude. La première section offre une explication intuitive du processus d'extraction des densités de probabilité à partir du prix des options et présente des exemples d'analyses effectuées à la Réserve fédérale des États-Unis au moyen de distributions de ce genre. La deuxième section expose les techniques permettant d'élaborer des séries de statistiques sommaires à échéance constante à partir des densités de probabilité extraites des instruments cotés en bourse. Nous prendrons pour exemple les options sur contrats à terme normalisés de devises, puisque les options à échéance constante négociées de gré à gré (*over the counter*) sur le marché des changes peuvent servir de points de comparaison avec les résultats calculés à partir des prix d'options cotées en bourse. Dans la troisième section, nous calculons à l'aide de différentes méthodes les intervalles de confiance applicables aux densités de probabilité. L'étude se termine par une synthèse des résultats et un exposé de nos conclusions.

## 1 Extraction des densités de probabilité — Technique et exemples

L'opération qui consiste à extraire du prix des options les attentes du marché n'a rien de nouveau, en particulier si l'on songe au calcul de la volatilité implicite à partir du prix des options. Récemment, on est passé de l'extraction d'un paramètre unique, comme la volatilité, à celle de toute la densité de probabilité (ou encore du processus stochastique) se rapportant à l'actif sous-jacent. Mentionnons parmi les exemples récents d'extraction des densités les travaux de Shimko (1993), Rubenstein (1994), Sherrick, Garcia et Tirupattur (1996), Bahra (1996), Malz (1997) ainsi que Melick et Thomas (1997); pour leur part, Bates (1991) et Malz (1996) ont essayé d'extraire du prix des options le processus stochastique suivi par l'actif sous-jacent<sup>1</sup>.

Ainsi que le montrent Cox et Ross (1976), le prix d'une option de type européen peut être exprimé sous la forme du produit actualisé de deux termes : la probabilité que, à l'expiration, l'option soit dans le cours (*in-the-money*) et le revenu espéré qui sera tiré de l'option si celle-ci est dans le cours à l'expiration. Ainsi, le prix d'une option d'achat de type européen,

---

1. Söderlind et Svensson (1997) fournissent un intéressant tour d'horizon des techniques d'extraction.

lorsque le prix d'exercice est  $X$  et le prix de l'actif sous-jacent  $f$ , peut s'exprimer sous la forme

$$c[X] = e^{-r \cdot t} \cdot \left( \int_X^\infty \gamma(f) df \cdot \left( \frac{\int_X^\infty f \cdot \gamma(f) df}{\int_X^\infty \gamma(f) df} - X \right) \right) \quad (1)$$

où  $\gamma(f)$  désigne une fonction de densité du prix de l'actif  $f$  à l'expiration du contrat et  $e^{-r \cdot t}$  est le facteur d'actualisation applicable à la période à courir jusqu'à l'expiration. La fonction de densité présentée à l'équation (1) incorpore à la fois les attentes actuarielles et l'attitude face au risque;  $\gamma(f)$  est la densité de probabilité neutre à l'égard du risque — celle que l'on obtiendrait si  $f$  était un processus de martingale — qui s'applique à l'actif sous-jacent. À condition de formuler une hypothèse au sujet de la forme fonctionnelle de  $\gamma(f)$ , on peut calculer le prix d'une option à n'importe quel prix d'exercice<sup>2</sup>. Bien entendu, on peut inverser le calcul et se servir du prix observé des options pour déduire la taille et la forme de la distribution des prix de l'actif sous-jacent à l'expiration. Comme le montrent Breeden et Litzenberger (1978), on peut établir la densité de probabilité entière de l'actif sous-jacent lorsque l'option est assortie d'une série continue de prix d'exercice. En pratique, toutefois, les prix d'exercice sont malheureusement en nombre limité, ce qui oblige à poser des hypothèses ou à adopter certaines structures a priori pour extraire une densité de probabilité du prix des options.

De plus, la plupart des options cotées en bourse sont des options de type américain sur contrats à terme, ce qui oblige à modifier quelque peu les formules fournies par Cox et Ross (1976). Ces modifications sont présentées par Melick et Thomas (1997), qui imposent des limites au prix des options américaines sur contrats à terme normalisés pour exprimer le prix d'une option en fonction de la densité de probabilité neutre à l'égard du risque. Ils inversent ensuite l'expression au moyen d'un algorithme qui minimise la somme des carrés des écarts entre les prix effectifs des options et les prix prévus, afin d'estimer les paramètres de la densité de probabilité.

Deux mises en garde doivent être formulées au sujet des densités de probabilité estimées. Tout d'abord, il existe un grand nombre de densités équivalentes sur le plan des observations en ce qui concerne l'information

---

2. Les prix des options calculés à l'aide du modèle de Black-Scholes reposent sur l'hypothèse que le prix de l'actif sous-jacent à l'expiration sera tiré d'une distribution lognormale.

véhiculée par un ensemble de prix d'option. C'est la structure choisie a priori, par exemple la forme fonctionnelle de la densité estimée, qui permet de choisir une distribution particulière. Par exemple, il est toujours possible de construire une série de densités (rectangulaires) uniformes qui sont parfaitement conformes aux prix observés des options, même si la densité de probabilité qui en résulte est souvent peu plausible<sup>3</sup>. La forme fonctionnelle qu'on attribue par hypothèse à la densité extraite peut être considérée comme une version lissée de ces densités uniformes. Ensuite, la mesure — inconnue — dans laquelle l'attitude face au risque est incorporée au prix des options complique l'interprétation des densités de probabilité implicites. Si l'on veut recourir à une analogie, on pourrait essayer de se baser sur les primes d'assurance contre les incendies pour extraire les probabilités appréhendées d'un incendie. Ceux qui souscrivent une police d'assurance sont disposés à payer davantage que la prime déterminée en fonction du risque actuariel ou véritable d'un incendie. Si, toutefois, un certain nombre de vendeurs sont en concurrence et que chacun soit en mesure de répartir ses risques de manière que la police représente un faible accroissement du risque applicable au portefeuille global de l'assureur, l'assurance sera tarifée à un prix voisin de sa juste valeur actuarielle. Par conséquent, les probabilités implicites extraites des primes d'assurance reflètent à la fois les vraies probabilités perçues et l'attitude face au risque.

C'est pourquoi les analyses effectuées à la Réserve fédérale au moyen des densités de probabilité implicites sont généralement axées sur des comparaisons « instantanées », portant sur des périodes relativement brèves durant lesquelles on peut présumer que l'attitude face au risque ne varie pas. Par exemple, la Figure 1 illustre six densités de probabilité implicites relatives aux contrats à trois mois sur l'eurodollar négociés à l'automne 1997, juste avant la publication, le 7 novembre, des statistiques favorables sur l'emploi en octobre. Les densités de probabilité ne sont séparées que d'une semaine ou deux, de sorte que l'hypothèse voulant que l'attitude face au risque soit constante pendant toute la période peut sembler raisonnable. Si cette hypothèse est vérifiée, toute modification des densités de probabilité est due à une modification des perceptions des marchés au sujet des probabilités actuarielles, probablement liée à un changement d'opinion au sujet de la politique monétaire américaine. Avant le 7 novembre, la densité au delà de 5,925 % (ligne verticale) est relativement faible. Après la publication des chiffres de l'emploi, la densité commence à augmenter dans la queue droite de la distribution. Comme on peut le constater à la lecture des divers graphiques constituant la Figure 1, la probabilité perçue d'un resserrement de la politique monétaire a augmenté

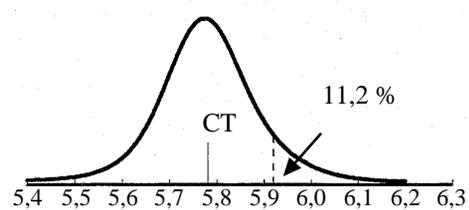
---

3. Neuhaus (1995) en fournit des exemples.

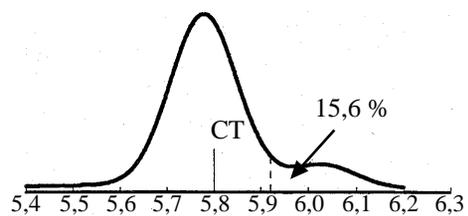
Figure 1

Densités de probabilité relatives aux contrats à terme (CT) décembre 1997 sur l'eurodollar

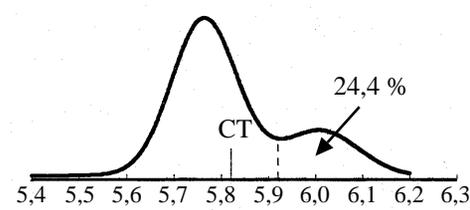
6 novembre 1997 Contrat à terme = 5,780



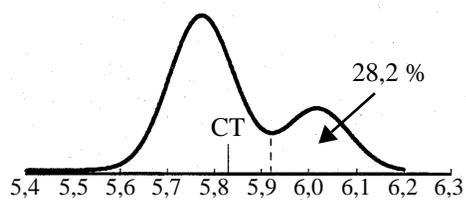
7 novembre 1997 Contrat à terme = 5,800



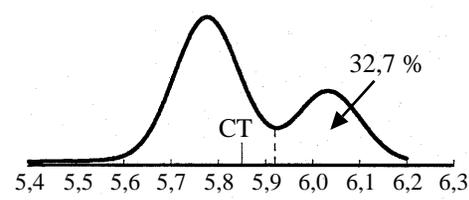
10 novembre 1997 Contrat à terme = 5,820



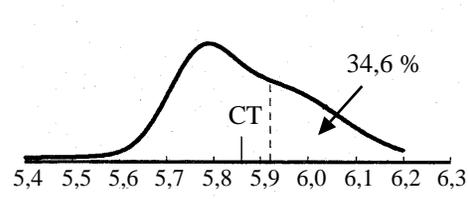
12 novembre 1997 Contrat à terme = 5,830



13 novembre 1997 Contrat à terme = 5,850



14 novembre 1997 Contrat à terme = 5,860



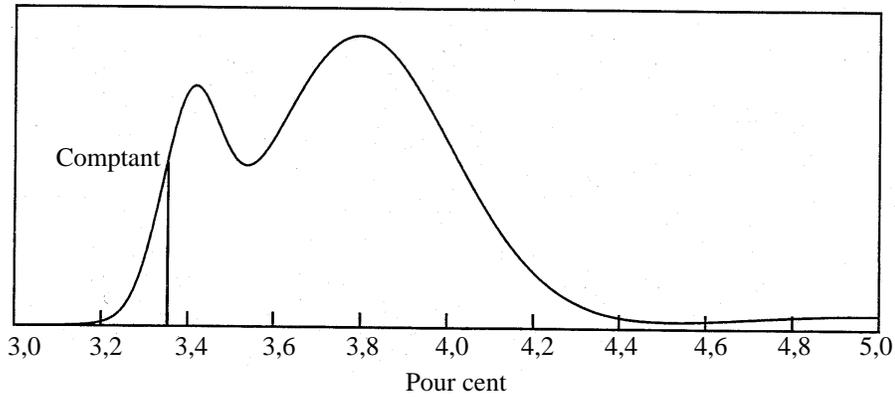
pendant la période considérée. Si l'on fait un calcul simple faisant intervenir i) l'écart entre le taux des fonds fédéraux et le taux des contrats à trois mois sur l'eurodollar et ii) les primes de terme sur le marché de l'eurodollar, un taux de 5,925 % aurait été compatible avec un relèvement de 25 points de base du taux des fonds fédéraux. La densité à droite de la barre des 5,925 % équivaut donc au risque appréhendé d'un relèvement de 25 points de base ou plus. Lorsque nous comparons les graphiques, nous voyons que la probabilité d'une telle hausse s'est accrue de près de 4 points de pourcentage entre le 10 et le 12 novembre, date de la réunion de novembre du Comité de l'open market. Au 14 novembre, la probabilité d'un taux supérieur à 5,925 % s'établissait à 34,6 %. À ce moment-là, à en juger par les prix des contrats à terme sur le marché des eurodollars, la « bosse » observée à droite entre les 7 et 13 novembre semblait compatible avec deux scénarios : i) un resserrement de 25 points de base en décembre, mais aucune augmentation ensuite ou ii) le maintien du taux cible des fonds fédéraux en décembre et un relèvement de 50 points de base en février.

Autre exemple, les trois graphiques présentés à la Figure 2 pour différentes dates d'octobre 1997 illustrent la densité de probabilité implicite, extraite des prix du marché, relative au contrat à trois mois sur l'eurodollar venant à échéance le 16 mars 1998. Les densités sont tirées des options sur contrats à terme sur l'eurodollar négociées à Londres. Les graphiques montrent l'évolution des attentes des opérateurs au voisinage de la date — le 9 octobre — où le taux des prises en pension a été relevé de 30 points de base en Allemagne. Cette augmentation a eu pour effet initial, mis à part le déplacement de la distribution vers la droite, l'accentuation de deux « masses » de probabilité déjà observées avant le relèvement du taux des prises en pension. Étant donné la distance qui sépare le taux d'intérêt à trois mois en vigueur (le taux au comptant) du sommet de gauche dans le graphique supérieur et celui du milieu, on peut raisonnablement conclure que la masse de gauche correspondait probablement à l'opinion voulant que la Bundesbank ne procède à aucune nouvelle majoration du taux des prises en pension entre octobre 1997 et juin 1998 (la fin de la période de trois mois commençant en mars). La masse de droite, dans les graphiques du haut et du milieu, peut être associée à l'opinion contraire, à savoir que le relèvement du taux des prises en pension en octobre n'était que la première d'une série d'augmentations à venir. La distance qui sépare les deux sommets dans le graphique du milieu, soit environ 40 points de base, indique approximativement la taille des augmentations futures prévues le 10 octobre par la deuxième catégorie d'opérateurs. Après le 10 octobre, le marché a porté une attention toute particulière aux propos intransigeants de divers hauts responsables de la Bundesbank, par exemple la déclaration d'Ottmar Issing selon laquelle les banques centrales des pays d'Europe devaient réagir à tout signe d'inflation afin que la future banque centrale européenne

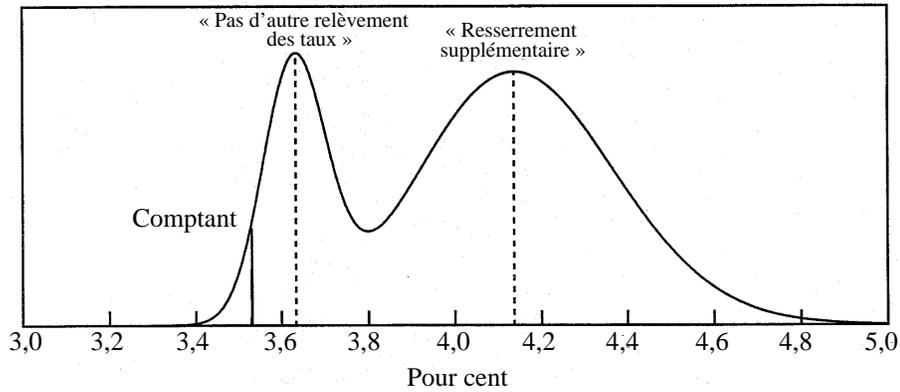
Figure 2

Densités de probabilité relatives aux contrats à trois mois sur l'euromark négociés à Londres  
Contrat mars 1998

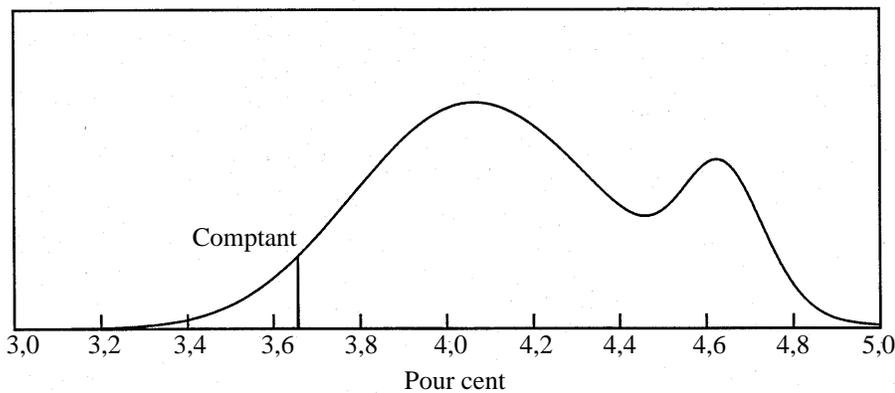
8 octobre 1997



10 octobre 1997



17 octobre 1997



n'hérite pas d'une situation chaotique. Ces commentaires ont amené à peu près tous les opérateurs à penser qu'il y aurait de nouvelles hausses de taux. De fait, la probabilité d'un relèvement encore plus marqué, pouvant atteindre jusqu'à 100 points de base, a commencé à rallier une partie des opérateurs, comme le montre la forme de la distribution à l'extrême droite. La masse située tout à droite, dans le graphique du bas, se trouve au delà du taux de 4,5 %, niveau vers lequel, selon certains commentateurs à l'époque, les taux courts de l'Union économique et monétaire (UEM) convergeraient. Bien entendu, l'opinion du marché a évolué depuis puisqu'on considère généralement, à l'heure actuelle, que les taux allemands n'augmenteront probablement pas avant la mise en place de l'UEM.

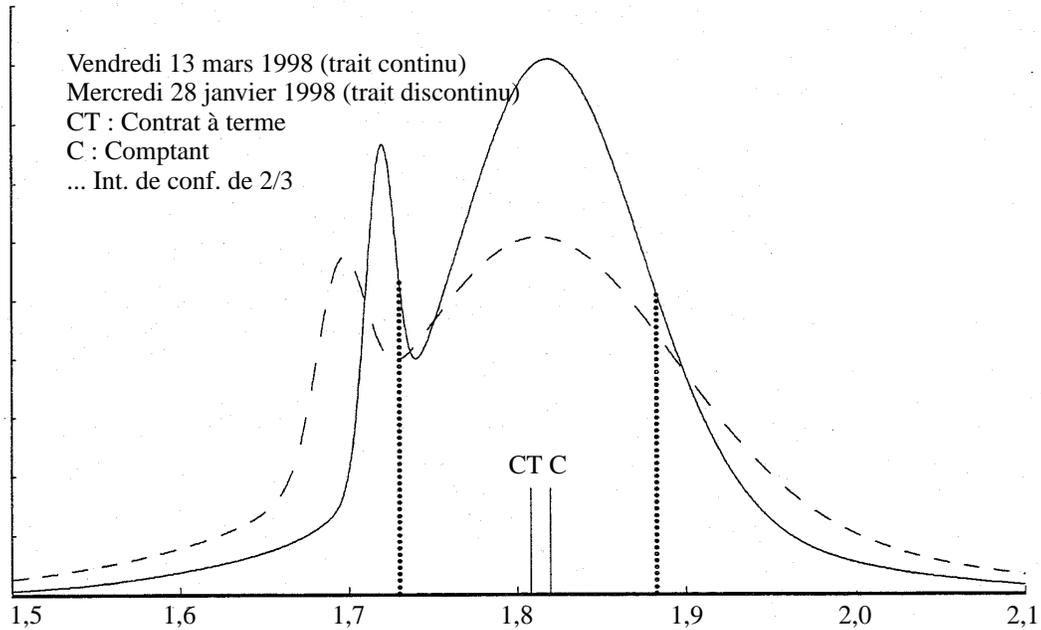
Les densités de probabilité implicites peuvent également servir à évaluer, par recoupement, les prévisions élaborées par d'autres moyens. Par exemple, les prévisions faites à la Réserve fédérale font intervenir l'appréciation du personnel en ce qui concerne les taux de change futurs. Les densités de probabilité implicites permettent de déterminer si ces prévisions sont raisonnables en les comparant à l'opinion du marché. La Figure 3 présente la densité de probabilité et les statistiques sommaires relatives au cours du mark allemand par rapport au dollar américain, calculées à partir du prix des options négociées au Chicago Mercantile Exchange (CME) durant les huit semaines, environ, séparant deux prévisions. On peut utiliser ces statistiques pour évaluer, par recoupement, les prévisions fondées sur l'appréciation du personnel de la Réserve fédérale.

La Figure 4 présente des statistiques sommaires calculées à partir des densités de probabilité implicites découlant du prix des options — en l'occurrence, des calculs de l'asymétrie relative au contrat à terme sur l'indice S&P 500. Le graphique illustre la période allant du 10 février au 4 avril. Il présente le rapport entre la probabilité que le prix des contrats à terme normalisés le 19 juin 1997 soit inférieur de 10 % à sa valeur courante et la probabilité que ce même prix soit supérieur de 10 % à la valeur en question. Ce ratio a généralement augmenté de la mi-février à la mi-avril, indiquant une probabilité relative accrue d'une baisse de 10 % et, simultanément, une volonté plus marquée des opérateurs de se couvrir contre l'évolution appréhendée. On observe aussi que les fortes baisses du prix des contrats à terme normalisés ont tendance à réduire temporairement le ratio, mais que ce dernier remonte habituellement les jours suivants.

La Figure 5, enfin, présente une analyse des interventions récentes des autorités japonaises sur le marché des changes, interventions qui auraient totalisé environ 20 milliards de dollars É.-U. Le graphique illustre les densités de probabilité avant (mercredi 8 avril 1998) et après (lundi 13 avril 1998) les interventions des autorités, survenues le jeudi 9 et le

**Figure 3**

**Distribution et prévision du cours du deutsche mark (DM/\$ É.-U.)  
Contrat à terme juin 1998**

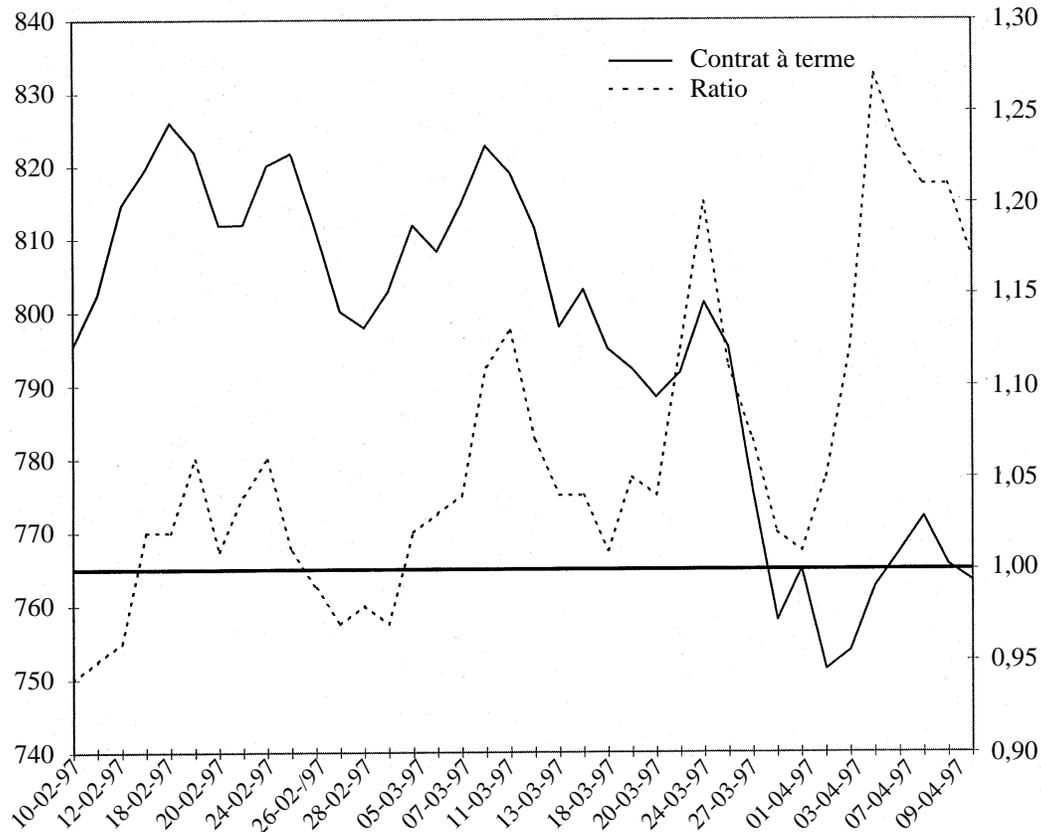


**Statistiques sommaires**

Date	Moyenne	Médiane	Limite inf.	Limite sup.	Dispersion relative		Coefficient d'asymétrie	Contrat à terme DM/\$ É.-U.
					Intervalle de 2/3	Intervalle de 9/10		
28-01-98	1,8063	1,8042	1,6971	1,9092	0,82	0,88	0,0177	1,7982
04-02-98	1,7951	1,7914	1,7013	1,8954	0,77	0,91	0,0307	1,7873
11-02-98	1,8116	1,8076	1,7149	1,9071	0,78	0,84	0,0375	1,8047
18-02-98	1,8155	1,8103	1,7208	1,9108	0,80	0,79	0,0535	1,8090
25-02-98	1,8130	1,8117	1,7209	1,8995	0,78	0,79	0,0130	1,8073
04-03-98	1,8125	1,8092	1,7316	1,8944	0,73	0,74	0,0381	1,8077
11-03-98	1,8253	1,8234	1,7479	1,8995	0,70	0,75	0,0226	1,8208
13-03-98	1,8121	1,8126	1,7297	1,8825	0,72	0,73	- 0,0065	1,8080

**Figure 4**

**Prix du contrat à terme sur l'indice S&P 500 et probabilité relative d'une baisse de 10 % par rapport à une hausse de 10 %**  
**Contrat juin 1997**



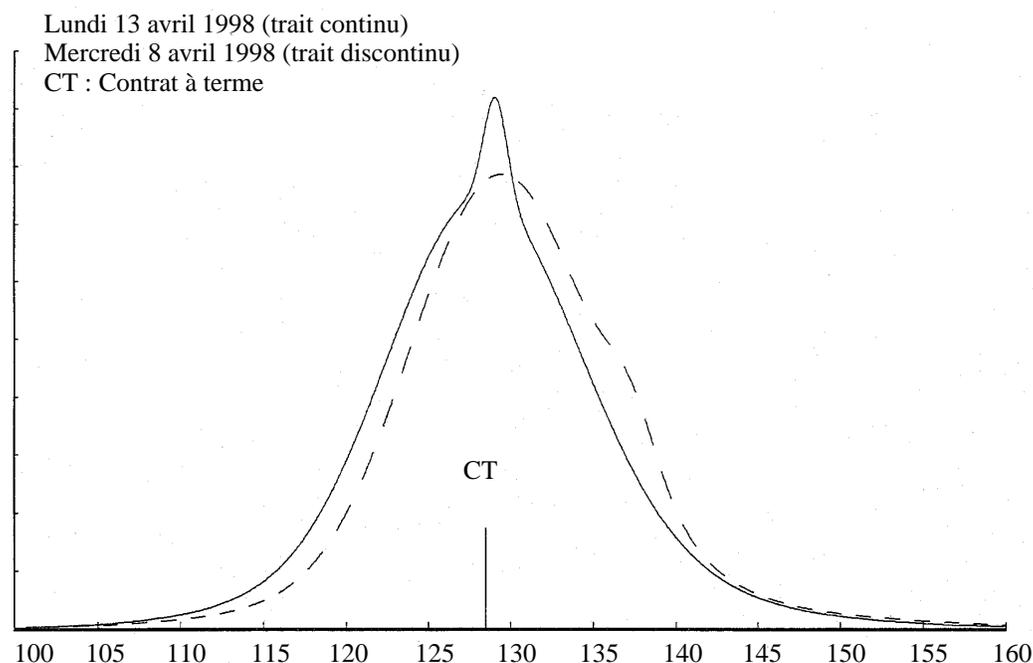
vendredi 10 avril 1998. Le tableau fait état des statistiques sommaires calculées à partir des deux fonctions de densité représentées dans le graphique et d'une densité estimée pour le jeudi 9 avril<sup>4</sup>. Les interventions ont permis d'éliminer un léger renflement du côté droit, ramenant la masse des probabilités vers la gauche avec une concentration particulière au voisinage de la « barre » présumée de 130 yens. Ainsi qu'on l'observe fréquemment, la dispersion des probabilités s'est accrue après les interventions, ce que confirment les statistiques sommaires se rapportant à la dispersion relative. Dans l'ensemble, les interventions, envisagées du point de vue du marché des options, semblent avoir eu un effet modeste.

4. Le Chicago Mercantile Exchange était fermé le Vendredi saint.

**Figure 5**

**Distribution du cours du yen (yen/dollar É.-U.)**

**Contrat à terme juin 1998**



**Statistiques sommaires**

Date	Moyenne	Médiane	Limite inf.	Limite sup.	Dispersion relative		Coefficient d'asymétrie	Contrat à terme yen/\$ É.-U.
					Intervalle de 2/3	Intervalle de 9/10		
08-04-98	130,36	130,02	123,99	136,64	1,21	1,27	0,0491	129,94
09-04-98	129,55	129,27	123,12	135,70	1,22	1,30	0,0398	129,13
13-04-98	128,89	128,70	122,46	135,16	1,28	1,39	0,0265	128,47

Lorsqu'on présente des données du genre de celles décrites aux Figures 1 à 5, deux questions surgissent habituellement. En premier lieu, on s'intéresse habituellement aux séries temporelles susceptibles d'être élaborées à partir des densités de probabilité, ce qui permettrait de replacer les mesures actuelles dans un contexte historique et, peut-être, d'obtenir une variable relative aux attentes utilisable dans une estimation macroéconomique de type classique faisant appel à une régression. En second lieu, on s'intéresse souvent aux intervalles de confiance dont les

densités de probabilité et les statistiques connexes sont assorties. Nous aborderons ces questions tour à tour dans les deux prochaines parties.

## 2 Élaboration d'une série à échéance constante

Lorsqu'on veut construire une série temporelle des mesures tirées des densités de probabilité implicites liées aux options, on se heurte habituellement au fait que, à mesure qu'on avance dans le temps, les contrats négociés en bourse approchent de la date d'expiration déterminée, de sorte que la plupart des mesures calculées dépendent de l'échéance. Qui plus est, plusieurs contrats se négocient chaque jour ouvrable, ce qui oblige à faire un choix — lequel doit permettre de remplacer un contrat lorsqu'il vient à expiration. Ces problèmes, loin de se limiter aux calculs relatifs aux densités de probabilité, se posent même dans la situation relativement simple où l'on veut établir la série temporelle du prix d'un contrat à terme déterminé (Ma, Mercer et Walker, 1992). Dans le reste de cette section, nous parlerons de dépendance à l'égard de l'échéance pour désigner aussi bien le problème de la durée à courir jusqu'à l'échéance que celui du remplacement des contrats venant à expiration.

En ce qui concerne les densités de probabilité, deux méthodes sont envisageables pour corriger le problème. Tout d'abord, la dépendance à l'égard de l'échéance peut être incorporée explicitement dans la forme fonctionnelle choisie pour la densité de probabilité; dans le calcul du prix d'une option d'achat effectué plus haut,  $\gamma(f)$  deviendrait alors  $\gamma(f, t)$ . C'est la méthode retenue par Black et Scholes dans leur modèle, où l'écart-type de la variation totale de prix sur la durée de l'option varie, par hypothèse, en fonction de la racine carrée de la durée à courir jusqu'à l'échéance. Butler et Davies (1998) appliquent une correction de ce genre aux densités de probabilité implicites dans le taux d'intérêt des contrats à trois mois sur l'eurosterling. La seconde méthode consiste à estimer librement les densités de probabilité, puis à corriger les résultats des calculs au titre de la dépendance à l'égard de l'échéance.

Peu importe la méthode choisie, les chercheurs n'ont habituellement pas de moyen de vérifier les résultats de cette correction. Le résultat final est le plus souvent une forme quelconque de série indépendante du temps ou à échéance constante, qui n'a pas réellement d'équivalent sur le marché. Ce n'est toutefois pas le cas des options sur devises, pour lesquelles il existe un contrat à échéance constante se négociant sur le marché de gré à gré. Par conséquent, le marché des options sur devises offre un terrain d'observation utile, et probablement unique en son genre, lorsqu'on veut étudier diverses méthodes de correction de la dépendance à l'égard de l'échéance.

**Tableau 1****Ensemble de données**

	Options négociées au Chicago Mercantile Exchange (CME)			Marché de gré à gré	
	Contrats	Jours de transaction	Période considérée	Jours de transaction	Période considérée
Deutsche mark	52	7 881	24-02-84–30-08-96	743	13-09-93–30-08-96
Yen	44	6 421	17-03-86–30-08-96	743	13-09-93–30-08-96

Le Tableau 1 décrit les ensembles de données que nous avons utilisés pour comparer les mesures calculées à partir du marché de gré à gré et du marché boursier.

En ce qui concerne les données du CME, les prix de règlement des options servent à estimer une densité de probabilité pour chaque contrat disponible au cours de chaque journée de transaction. Les options étant de type américain, c'est la technique de Melick et Thomas (1997) qui nous sert à extraire la densité de probabilité neutre à l'égard du risque. Dans le cas du marché de gré à gré, il s'agit d'options européennes à un mois sur le taux de change au comptant, les prix indiqués en volatilité implicite à l'aide du modèle de Black-Scholes étant convertis en unités monétaires<sup>5</sup>. Les volatilités implicites correspondent aux prix indicatifs, à parité<sup>6</sup>, fournis par les teneurs de marché; il ne s'agit pas des prix de transaction. Chaque jour, le marché de gré à gré fournit des prix pour le contrat à un mois. Par conséquent, toute série basée sur ces prix est, par définition, à échéance constante. Les données du marché de gré à gré pourront ensuite servir à juger de l'efficacité des diverses corrections apportées aux données du CME.

Bien entendu, la comparaison entre les données du CME et du marché de gré à gré n'aura d'utilité que dans la mesure où les deux marchés sont liés. On sait de source informelle que d'importantes maisons de courtage, par exemple, ont des employés chargés de suivre les deux marchés pour voir s'ils présentent des possibilités d'arbitrage. La Figure 6 corrobore l'existence de relations étroites entre ces deux marchés. On y voit les prix indicatifs, à parité, observés sur le marché de gré à gré (le trait continu) et les volatilités implicites en taux annuels, toujours à parité, tirées du « contrat prochain » au CME (le trait discontinu)<sup>7</sup>. Les courbes sont très similaires,

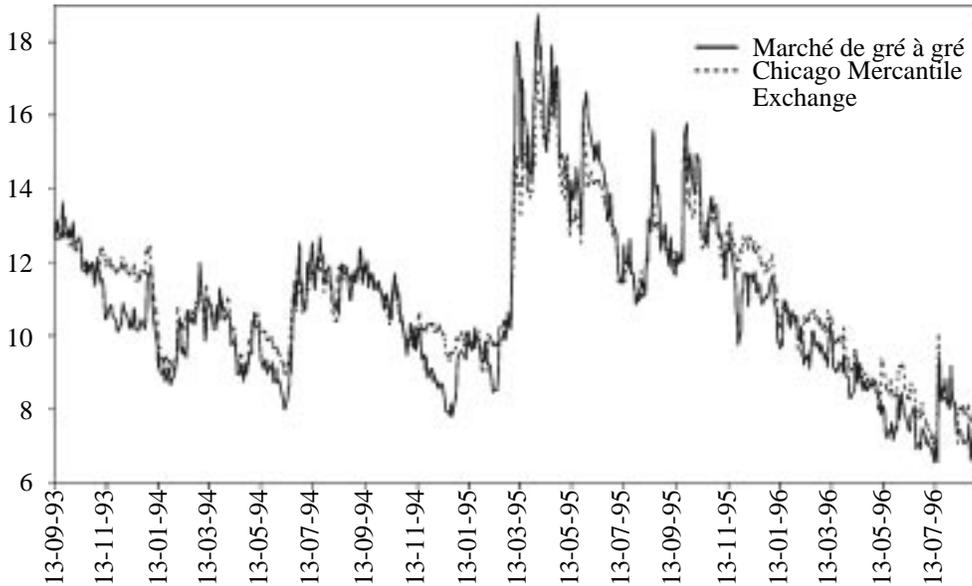
5. Malz (1997) expose les conventions du marché de gré à gré.

6. Une option à parité est une option dont le prix est égal, à un moment précis, au cours du titre ou produit sous-jacent ou en est relativement proche.

7. Ces volatilités sont calculées à l'aide de l'option d'achat, au CME, qui est la plus proche de la parité. La volatilité est extraite au moyen de l'approximation de Barone-Adesi et Whaley (1987). Le contrat prochain est par convention le contrat qui, parmi ceux qui ont plus de 30 jours à courir, est le plus proche de l'échéance.

**Figure 6**

**Volatilités implicites du deutsche mark — CME et marché de gré à gré**  
**Corrélation = 0,959**



avec une corrélation simple de 0,96. Les écarts semblent correspondre dans une certaine mesure aux points de remplacement du contrat dans la série fondée sur le contrat prochain élaborée à partir des données du CME. Après remplacement par un nouveau contrat, l'option a généralement 120 jours à courir jusqu'à l'échéance, comparativement à 30 jours sur le marché de gré à gré. Étant donné la structure par échéance habituelle de la volatilité implicite (qui est plus élevée pour les contrats à plus long terme), la volatilité des données du CME est un peu supérieure, après le remplacement, à celle des données du marché de gré à gré. Il reste que les deux marchés sont très étroitement liés; on peut donc se servir des données du marché de gré à gré pour juger de l'efficacité des corrections apportées aux données du CME au titre de la dépendance à l'égard de l'échéance.

Pour élaborer une méthode de correction, il faut évidemment disposer d'une mesure qui soit calculée à partir d'une densité de probabilité et qui souffre d'un problème de dépendance à l'égard de l'échéance. Nous choisirons pour cela une mesure indubitablement affligée de ce problème,

l'écart interquartile mis à l'échelle, calculé à partir des densités de probabilité du CME. Si nous désignons par  $Q_z$  la valeur telle que

$$\int_0^{Q_z} \gamma(f)df = z,$$

l'écart interquartile est donné par le rapport

$$\frac{Q_{0,75} - Q_{0,25}}{F},$$

où  $F$  représente le prix des contrats à terme normalisés. La Figure 7 illustre la forte dépendance de l'écart interquartile à l'égard de l'échéance, dans le cas des options sur deutsche mark cotées au CME. Plus on est loin de la date d'échéance, plus l'écart interquartile est important; il semble bien que le rapport soit logarithmique. La Figure 8 présente la même mesure pour le contrat prochain et met clairement en lumière la dépendance à l'égard de l'échéance puisque l'écart interquartile fait un bond à chaque changement de contrat. Trois méthodes nous serviront à corriger l'écart interquartile. Dans chacune, nous utilisons les résidus d'une régression qui vise à éliminer la dépendance à l'égard de l'échéance. Les trois équations de régression sont les suivantes :

$$\ln(EI_{i,t}) = \xi_i + \kappa_i \cdot \ln(j_{i,t}) + \mu_{i,t}; \tag{2}$$

$$\ln(EI_{i,t}) = \alpha + \beta \cdot \ln(j_{i,t}) + \gamma_i + \varepsilon_{i,t}; \tag{3}$$

$$\ln(EI_t) = \varpi + \rho \cdot \ln(j1_t) + \delta \cdot \ln(j2_t) + \eta \cdot cc_t + \lambda_p; \tag{4}$$

où :

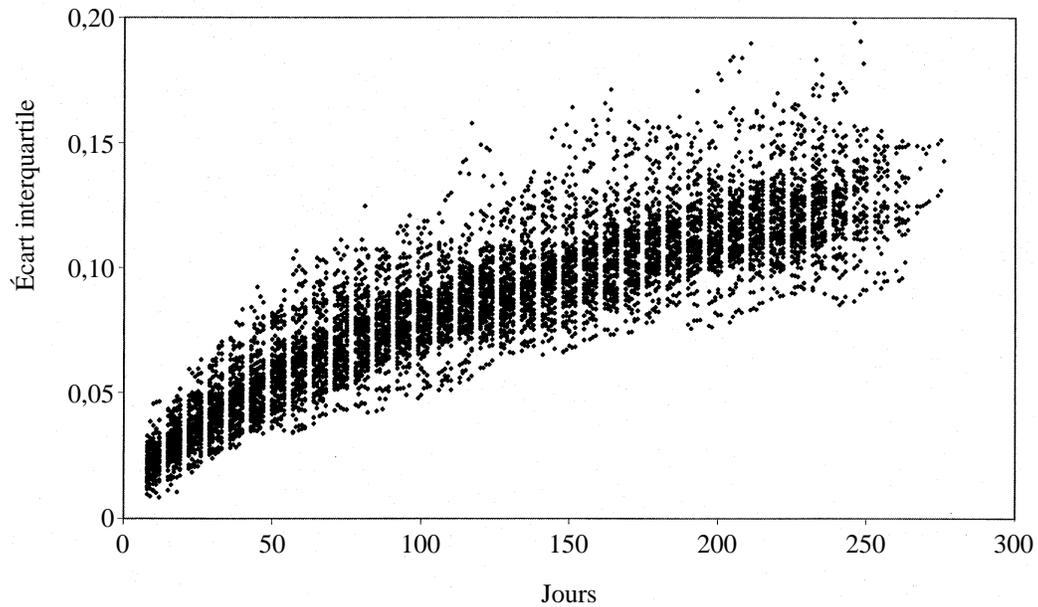
$EI_{i,t}$  = écart interquartile mis à l'échelle du contrat  $i$  le jour  $t$ ;

$j_{i,t}$  = nombre de jours à courir jusqu'à l'échéance du contrat  $i$  le jour  $t$ ;

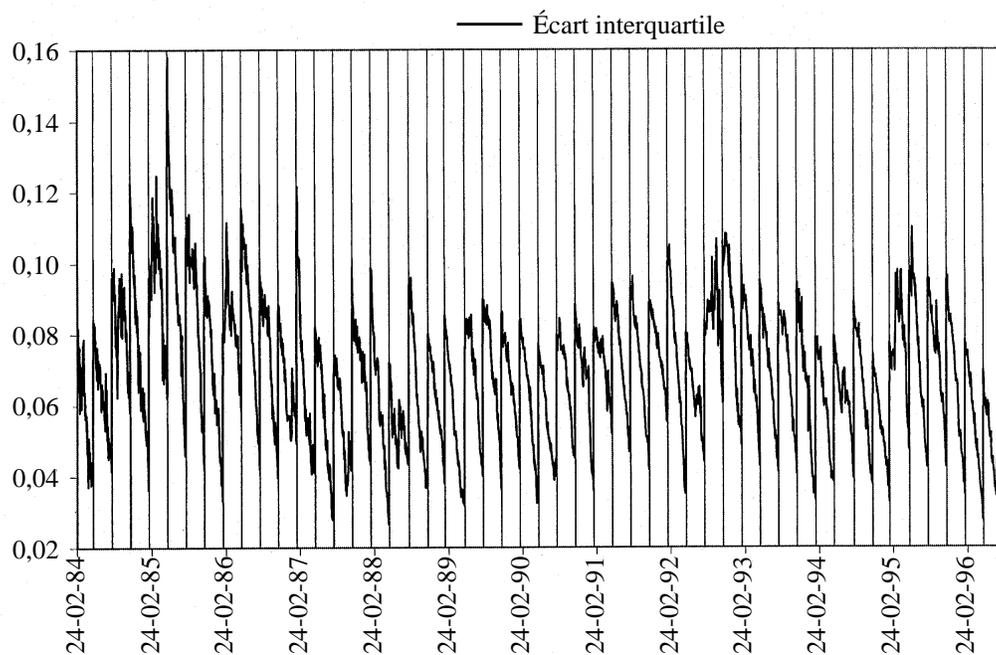
$j1_t$  et  $j2_t$  = nombre de jours à courir (1) sans changement de contrat et (2) avec changement de contrat;

$cc_t$  = variable muette représentant le changement de contrat.

Les deux premières régressions permettent d'estimer les corrections au titre de l'échéance lorsqu'on utilise l'écart interquartile applicable à tous les contrats disponibles au cours de chaque jour de transaction, d'où le double indice. La première équation est plus générale, puisque les effets de la durée à courir jusqu'à l'expiration peuvent varier selon les contrats. La deuxième équation impose des effets constants, quel que soit le contrat, de la durée à courir jusqu'à l'expiration, mais elle admet une constante propre à chaque

**Figure 7****Écart interquartile mis à l'échelle et horizon****Figure 8****Écart interquartile mis à l'échelle du contrat prochain sur le deutsche mark au CME**

Les traits verticaux indiquent les changements de contrat.



contrat. Dans la troisième équation, la variable dépendante est une série ne prenant en compte qu'un seul contrat pour chaque jour de transaction, en l'occurrence le contrat ayant au moins 30 jours à courir qui est le plus proche de l'échéance. Étant donné le profil que révèle la Figure 7, chaque équation exprime une relation entre des variables en logarithme.

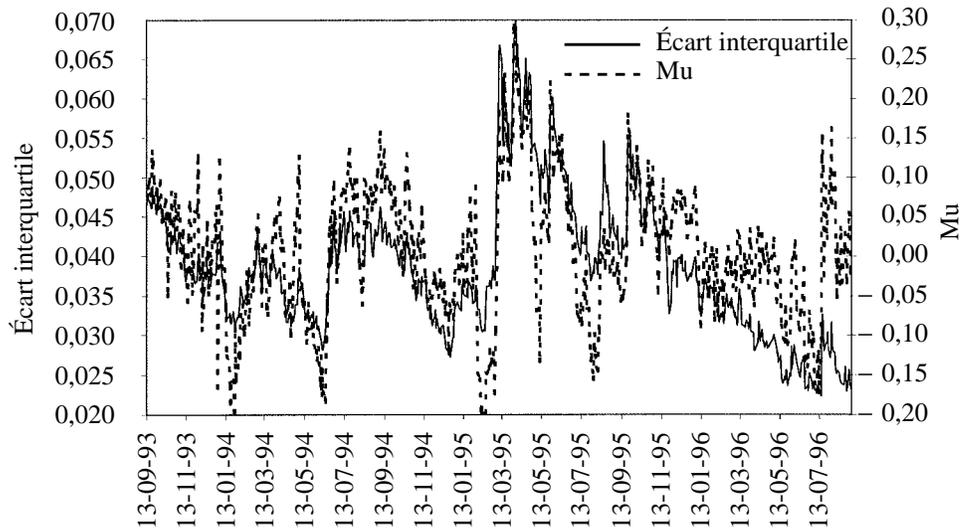
Les coefficients estimés pour les trois équations ne présentent pas véritablement d'intérêt. La seule vraie question est de savoir si ces équations ont ou non saisi tous les effets de dépendance à l'égard de l'échéance. Pour le savoir, nous créons une série temporelle fondée sur les données relatives au contrat prochain à l'aide des résidus des trois équations. Pour les deux premières, nous avons choisi le résidu se rapportant au contrat ayant au moins 30 jours à courir qui était le plus proche de l'échéance. Dans le cas de la troisième équation, la série fournie par les résidus concerne déjà des contrats prochains. Aux Figures 9 à 11, les résidus des équations relatives au deutsche mark sont comparés à l'écart interquartile calculé à partir des densités de probabilité implicites que contiennent les prix des options négociées de gré à gré, pour nous permettre de déterminer si la dépendance à l'égard du temps a été corrigée. Le Tableau 2 présente les coefficients de corrélation entre les résidus estimés et les mesures du marché de gré à gré.

Les figures présentées à la fin de l'étude tout comme le Tableau 2 confirment que c'est l'équation (4) qui décrit le mieux les données du marché de gré à gré. Plus précisément, le meilleur processus consiste, semble-t-il, à i) élaborer la série « contrat prochain » de la mesure qui nous intéresse (en l'occurrence, l'écart interquartile mis à l'échelle) et ii) à corriger la série, par régression, de la dépendance à l'égard du temps et des changements de contrat. L'autre méthode (équations (2) et (3)), qui consiste à corriger d'abord la dépendance à l'égard de l'échéance, puis à élaborer la série fondée sur le contrat prochain, ne donne pas d'aussi bons résultats. C'est ce que confirme le Tableau 3, qui présente les résultats des régressions de la variation des résidus de la série « contrat prochain », dans les équations (2) et (3), sur la variable muette relative au changement de contrat.

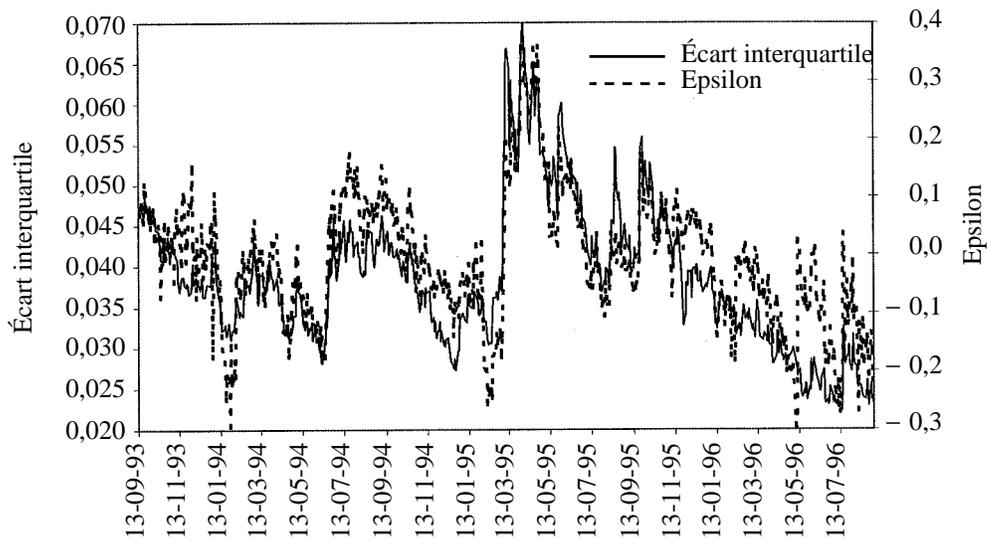
La deuxième colonne du Tableau 3 présente les résultats de la régression quand la variable dépendante est la valeur absolue de la variation du résidu. Dans le cas du deutsche mark, le coefficient de la variable muette correspondant au changement de contrat n'est pas significatif dans les régressions portant soit sur la variation du résidu, soit sur la valeur absolue de cette variation. Chose étonnante, on ne fait pas la même observation dans le cas du yen, le coefficient de la variable muette représentant le changement de contrat étant alors significatif dans les régressions portant sur la valeur absolue de la variation du résidu. Pour le yen, la série fondée sur le contrat prochain « saute » lorsque le contrat est remplacé, sans pour autant marquer une variation à la hausse ou à la baisse qui soit prévisible. Ces changements

**Figure 9**

**Écart interquartile mis à l'échelle et mu du marché de gré à gré, deutsche mark**

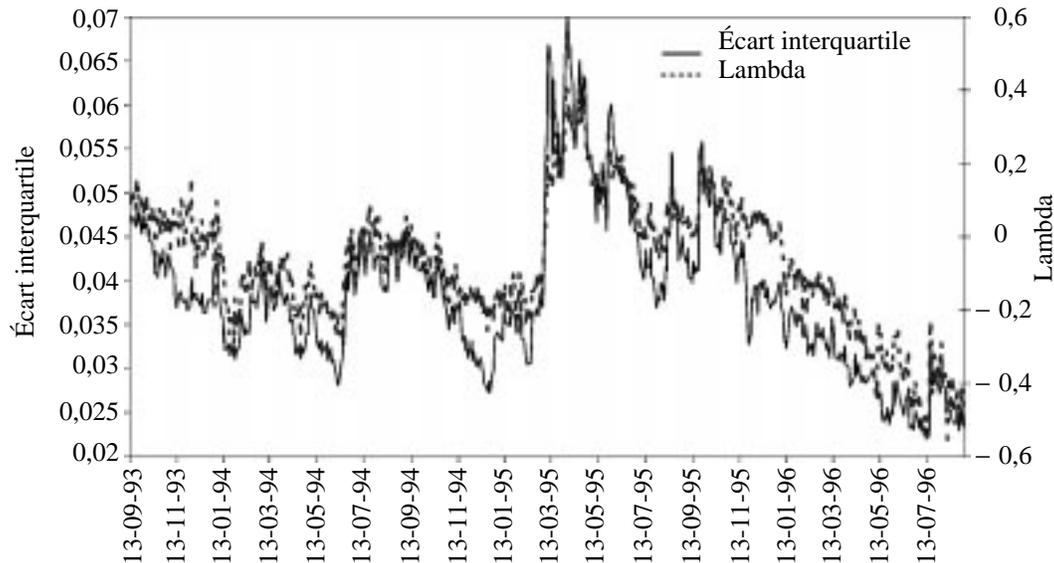
**Figure 10**

**Écart interquartile mis à l'échelle et epsilon du marché de gré à gré, deutsche mark**



**Figure 11**

**Écart interquartile mis à l'échelle et lambda du marché de gré à gré, deutsche mark**



brusques des résidus, dans le cas du yen, rendent encore plus défavorable la comparaison avec les résidus de l'équation (4).

### 3 Incertitude de la distribution estimée

Nous nous pencherons ici sur les questions que pose l'évaluation chiffrée de l'incertitude qui entoure les distributions estimées et les déductions qu'on peut en tirer. Nous ferons d'abord un bref rappel de la méthode d'estimation et de la théorie sur laquelle elle repose. Nous exposerons ensuite diverses façons de calculer un intervalle de confiance et présenterons des exemples qui montrent comment ces méthodes peuvent produire des résultats très différents.

#### 3.1 Rappel de la méthode d'estimation

Tout au long de cette partie, nous nous intéresserons aux distributions tirées d'options de type européen, la théorie et les calculs étant dans ce cas relativement simples.

**Tableau 2**

**Corrélation entre les résidus relatifs à l'écart interquartile au CME et les résidus relatifs à l'écart interquartile sur le marché de gré à gré**  
**Période allant du 13 septembre 1993 au 30 août 1996**

	Deutsche mark	Yen
$\hat{\mu}$ — Équation (2)	0,679	0,731
$\hat{\varepsilon}$ — Équation (3)	0,840	0,865
$\hat{\lambda}$ — Équation (4)	0,928	0,924

**Tableau 3**

**Statistique t de la variable muette relative au changement de contrat dans les régressions des résidus de l'écart interquartile de la série « contrat prochain » sur la variable muette**

	Deutsche mark		Yen	
	Du 24 février 1984 au 30 août 1996		Du 7 mars 1986 au 30 août 1996	
	Variable dépendante			
	Écart interquartile	Valeur absolue de l'écart interquartile	Écart interquartile	Valeur absolue de l'écart interquartile
$\hat{\mu}$ — Équation (2)	- 0,249	0,126	- 0,422	- 1,609
$\hat{\varepsilon}$ — Équation (3)	- 0,405	- 0,579	- 0,609	- 2,163

Grâce à Cox et Ross (1976), nous savons que le prix d'équilibre d'une option d'achat de type européen peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \tilde{c}_t[X] &= e^{-rt} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_t[f] \cdot \max[f - X, 0] df \\ &= e^{-rt} \int_X^{\infty} \gamma_t[f] \cdot [f - X] df, \end{aligned} \quad (5)$$

où  $X$  désigne le prix de levée de l'option,  $r$  le taux d'intérêt sûr,  $t$  la durée à courir jusqu'à l'échéance de l'option et  $\gamma[\bullet]$  une distribution neutre à l'égard du risque (c'est-à-dire celle que l'on obtiendrait si  $c$  était un processus de martingale) pour toutes les valeurs possibles du prix du contrat à terme normalisé,  $f$ , à la date d'expiration de l'option. Le tilde au-dessus du  $c$  indique qu'il s'agit du prix d'équilibre théorique de l'option.

De même, le prix d'équilibre d'une option de vente peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\tilde{p}_t[X] &= e^{-rt} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_t[f] \cdot \max[X - f, 0] df \\ &= e^{-rt} \int_0^X \gamma_t[f] \cdot [X - f] df.\end{aligned}\quad (6)$$

Nous remarquons que  $\gamma[\bullet]$  est indépendant du prix d'exercice de l'option et de sa nature (achat ou vente). C'est-à-dire que le même gamma sert à évaluer toutes les options sur  $f$  à un moment donné.

Les prix observés des options peuvent différer de ces prix théoriques, et ce, pour plusieurs raisons. Il se peut que des transactions motivées par des facteurs de liquidité amènent les prix à s'écarter temporairement de leur niveau d'équilibre. De même, quand de nouveaux renseignements apparaissent, il faut peut-être un certain temps pour qu'ils soient largement diffusés et incorporés aux prix. Enfin, les prix sont exprimés selon une échelle dont la gradation est discrète. Nos estimations sont fondées sur les prix de règlement en fin de journée, ce qui atténue les deux premières causes d'erreur. La dernière, soit l'arrondissement des prix au degré le plus proche de l'échelle, continue de faire problème; nous essaierons, ci-après, d'en chiffrer l'effet.

Nous définissons l'erreur d'observation,  $\varepsilon^o[X]$ , comme la différence entre les prix observés des options,  $c[X]$  ou  $p[X]$ , et le prix théorique présenté précédemment :

$$\varepsilon_{ct}^o[X] \equiv c_t[X] - e^{-rt} \int_X^{\infty} \gamma_t[f] \cdot [f - X] df \quad (7)$$

$$\varepsilon_{pt}^o[X] \equiv p_t[X] - e^{-rt} \int_0^X \gamma_t[f] \cdot [X - f] df \quad (8)$$

La théorie n'impose aucune restriction à  $\gamma[\bullet]$ , si ce n'est qu'il doit s'agir d'une fonction de distribution; c.-à-d. que  $\gamma[\bullet]$  doit être toujours positif et que son intégrale calculée sur l'éventail des prix possibles de  $f$  prend la valeur de un. Pour estimer  $\gamma[\bullet]$ , nous utilisons une expression approchée, plus précisément une fonction de distribution paramétrique souple  $g[\bullet; \theta]$ . Comme il s'agit d'une approximation, nous introduisons là une deuxième source d'erreur. Nous définissons l'erreur de modélisation,

$\varepsilon^m[X]$ , comme la différence entre la valeur théorique de l'option d'après  $\gamma[\bullet]$  et sa valeur selon la fonction approchée  $g[\bullet; \theta]$  :

$$\varepsilon_{ct}^m[X; \theta] \equiv \tilde{c}_t[X] - e^{-rt} \int_X^{\infty} g_t[f; \theta] \cdot [f - X] df \quad (9)$$

$$\varepsilon_{pt}^m[X; \theta] \equiv \tilde{p}_t[X] - e^{-rt} \int_0^X g_t[f; \theta] \cdot [X - f] df. \quad (10)$$

Par conséquent, pour un ensemble estimé de paramètres  $\theta$ , l'erreur totale de prévision des prix,  $\varepsilon[X, \theta]$ , peut s'exprimer sous la forme de la somme de deux erreurs, l'erreur d'observation et l'erreur de modélisation :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ct}[X; \theta] &\equiv c_t[X] - e^{-rt} \int_X^{\infty} g_t[f; \theta] \cdot [f - X] df \\ &= \varepsilon_{ct}^o[X] + \varepsilon_{ct}^m[X; \theta] \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{pt}[X; \theta] &\equiv p_t[X] - e^{-rt} \int_0^X g_t[f; \theta] \cdot [X - f] df \\ &= \varepsilon_{pt}^o[X] + \varepsilon_{pt}^m[X; \theta]. \end{aligned} \quad (12)$$

Dans les exemples qui suivent plus bas, la forme fonctionnelle que nous utilisons pour  $g[f]$  est une combinaison de deux distributions logarithmiques normales. La fonction de distribution  $g[f]$  peut s'écrire sous la forme

$$g[f; \theta] = \pi_1 \cdot \ln[f; \mu_1, \sigma_1] + \pi_2 \cdot \ln[f; \mu_2, \sigma_2],$$

où  $\theta \equiv (\pi_1, \mu_1, \sigma_1, \pi_2, \mu_2, \sigma_2)$  et  $\ln[\bullet; \mu, \sigma]$  est la distribution lognormale.

Pour que  $g[f]$  soit bien une densité de probabilité, nous imposons les conditions

$$1 \geq \pi_i \geq 0 \quad (i = 1, 2); \quad \pi_1 + \pi_2 = 1.$$

Pour des raisons expliquées ci-après, nous imposons aussi une contrainte supplémentaire aux paramètres de dispersion des deux distributions lognormales :

$$\sigma_i \geq \underline{\sigma} = 0,02 \quad (i = 1, 2).$$

L'estimation prend alors la forme suivante :

$$\hat{\theta}_t = \underset{\theta}{\operatorname{Argmin}} \left( \sum_{x \in X_{ct}} \epsilon_{ct}^2 [x; \theta] + \sum_{x \in X_{pt}} \epsilon_{pt}^2 [x; \theta] \right),$$

(où  $X_{ct}$  et  $X_{pt}$  sont les prix d'exercice disponibles) sous les conditions

$$1 \geq \pi_i \geq 0 \quad (i = 1, 2);$$

$$\pi_1 + \pi_2 = 1;$$

$$\sigma_i \geq \underline{\sigma} = 0,02 \quad (i = 1, 2).$$

On peut résoudre l'équation comme s'il s'agissait d'un problème de maximisation de la vraisemblance sous contrainte ou d'estimation des moindres carrés non linéaires.

### 3.2 Exemple

Pour illustrer notre technique d'estimation et les questions que pose l'évaluation chiffrée de l'incertitude, nous prenons pour exemple les prix des options sur les taux d'intérêt à court terme en Allemagne. Ces options sont négociées au London International Financial Futures Exchange (LIFFE) et, moyennant une modification mineure, peuvent être considérées comme des options de type européen<sup>8</sup>. Le 25 septembre 1997, 23 options se sont négociées sur le contrat décembre 1997. Les prix d'exercice des options variaient entre 94 et 98,5, ce qui correspond à des taux d'intérêt allant de 1,5 % à 6 %<sup>9</sup>. Les prix d'exercice sont séparés de 25 points de base et les prix des options sont exprimés en points de base.

L'écart de 25 points de base entre les prix d'exercice nous a amenés à choisir 0,02 comme borne inférieure des paramètres de dispersion ( $\underline{\sigma}$ ). Quand le paramètre de dispersion de l'une des distributions lognormales se

---

8. Sur le plan technique, les options négociées au LIFFE sont de type américain, puisqu'elles peuvent être levées avant l'échéance. Cependant, en raison du mécanisme de marge utilisé au LIFFE, il n'est jamais optimal d'exercer une option avant l'échéance. De plus, ce mécanisme élimine la nécessité d'actualiser la valeur future de l'option quand nous en établissons le prix aujourd'hui. C'est-à-dire que, pour le contrat à considérer, nous omettons le terme  $\exp(-r \cdot t)$  dans les formules de calcul du prix.

9. Avant l'estimation, les prix d'exercice des options sont convertis en taux d'intérêt équivalents en les soustrayant de 100, et l'on intervertit les indices des variables représentant les options de vente et d'achat. Grâce à cette conversion, la combinaison de distributions lognormales, avec sa borne inférieure égale à zéro et sa borne supérieure illimitée, demeure une forme fonctionnelle convenable. Autrement, la distribution estimée aurait une borne supérieure implicite de 100 % et accorderait une certaine place à des taux d'intérêt négatifs.

situé à cette valeur minimale, plus de 95 % de la masse de cette distribution se situe entre des prix d'exercice adjacents. L'information véhiculée par les prix des options est telle qu'elle ne permet pas de distinguer deux distributions ayant la même masse et la même moyenne entre deux prix d'exercice adjacents. Grâce à cette borne inférieure, donc, le programme d'optimisation n'a pas essayé de distinguer les distributions équivalentes sur le plan des observations<sup>10</sup>. Pour la journée en question, l'un des paramètres de dispersion a été fixé à sa borne inférieure.

Le graphique du haut, à la Figure 12, présente la densité estimée pour la journée en question. Nous remarquons la masse supplémentaire (par rapport à une distribution lognormale simple) entre 3,6 % et 4 %. Nous essaierons plus loin de chiffrer la confiance que nous pouvons avoir dans notre estimation de la masse au delà de 3,6 %.

Le graphique du bas présente les résidus de l'équation de prix des options. Nous remarquons que l'erreur absolue maximale est de l'ordre de 0,005, soit la moitié de l'unité de cotation du prix des options; cela indique que la densité de probabilité estimée explique bien les prix observés des options. Cependant, nous notons aussi que les erreurs, de toute évidence, ne sont pas indépendantes du prix d'exercice de l'option et de la nature de cette dernière. Ce profil des termes d'erreur est l'un des éléments à considérer au moment de choisir une méthode pour établir les intervalles de confiance.

### 3.3 Deux méthodes permettant d'établir les intervalles de confiance

La question qui nous préoccupe ici concerne l'incertitude qui entoure la fonction de densité estimée et celle qui se rattache aux déductions tirées de la fonction estimée. Nous pourrions, par exemple, vouloir nous prononcer sur la probabilité que  $f$  se situe au-dessus d'un point déterminé ou sur la valeur anticipée de  $f$  si  $f$  est supérieur à un point déterminé. De façon générale, les valeurs proprement dites des divers paramètres ne nous intéressent guère. Par conséquent, les écarts-types applicables aux paramètres estimés que produisent la plupart des programmes d'estimation ne sont pas d'une grande utilité.

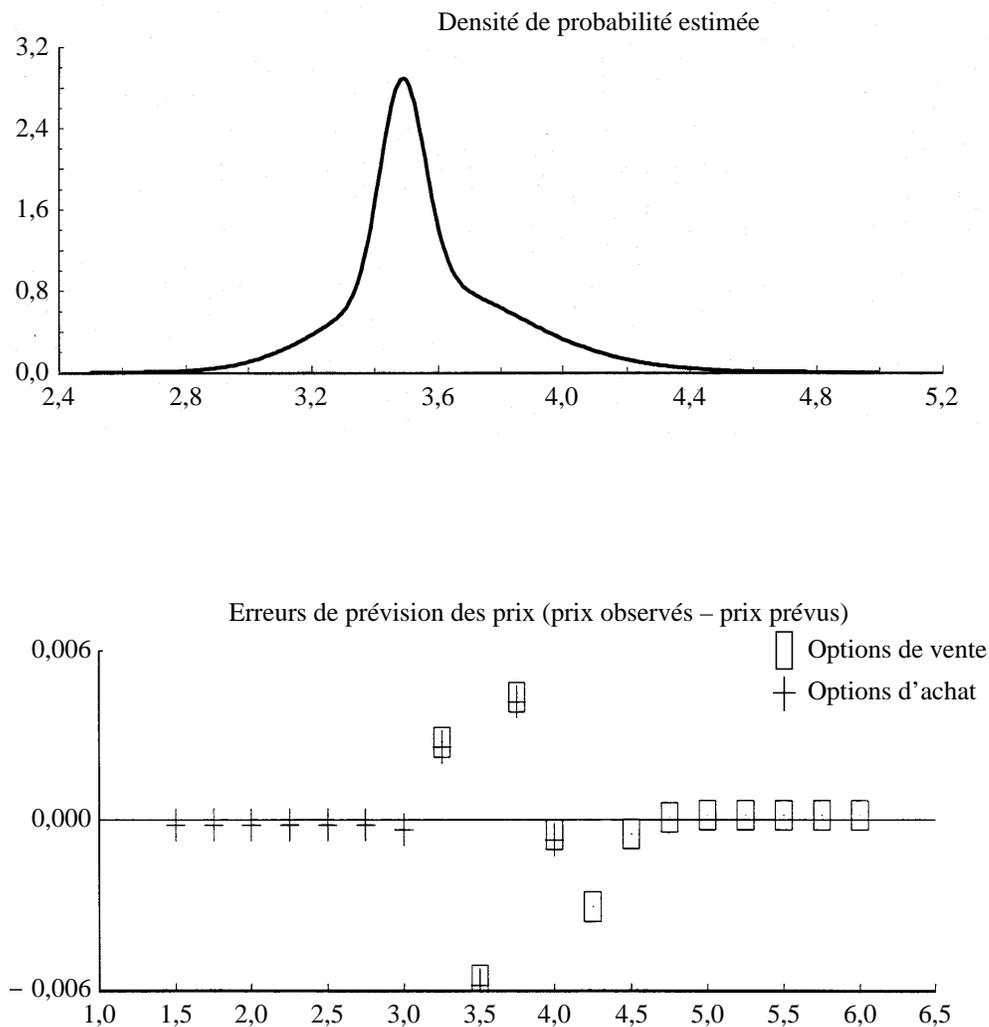
Nous avons appliqué la méthode de Monte-Carlo et la méthode de rééchantillonnage *bootstrap* pour évaluer l'incertitude entourant les

---

10. Le lecteur trouvera dans Melick et Thomas (1997, p. 98-99) un exposé consacré aux fonctions de densité équivalentes sur le plan des observations.

**Figure 12**

**Prix, le 25 septembre 1997, du contrat à terme décembre 1997 sur l'euro-mark**



distributions estimées et les déductions qu'on peut en tirer<sup>11</sup>. Les deux méthodes produisent des résultats très différents, ce qui fait ressortir la nature bien particulière du problème d'estimation. Les contraintes imposées aux paramètres pendant l'estimation rendent un peu plus complexe le calcul

11. La méthode du delta donne des résultats analogues à ceux de la méthode de Monte-Carlo en ce qui concerne les intervalles de confiance entourant la densité de probabilité estimée. On a cependant besoin, pour appliquer la méthode du delta, des dérivées de la fonction considérée; or, ces dérivées ne sont pas toujours disponibles. C'est pourquoi nous axons notre analyse sur la méthode de Monte-Carlo, qui se prête à une plus large application.

des limites de l'intervalle de confiance, mais ce n'est pas là la cause des différences entre les résultats donnés par les deux méthodes.

### 3.4 Méthode de Monte-Carlo

La recherche du maximum de vraisemblance sous contrainte nous permet d'obtenir une estimation ponctuelle,  $\hat{\theta}$ , pour le vecteur des paramètres et, à partir de la hessienne, une matrice des covariances,  $\Sigma$ , pour les paramètres estimés. La méthode de Monte-Carlo exploite le fait que, dans certaines conditions de régularité,  $(\hat{\theta} - \theta) \sim N(0, \Sigma)$ , où  $\theta$  est le « vrai » vecteur des paramètres. Nous procédons à 500 tirages dans cette distribution et les rajoutons aux paramètres estimés. Nous obtenons ainsi

$$\hat{\Theta} = \{\tilde{\theta}^1, \tilde{\theta}^2, \dots, \tilde{\theta}^{500}\},$$

une pseudo-distribution du vrai vecteur des paramètres. À partir de cette pseudo-distribution, nous pouvons établir les intervalles de confiance de la densité de probabilité et d'autres fonctions de  $\theta$ .

Le graphique du haut, à la Figure 13, illustre l'incertitude qui entoure la densité de probabilité estimée. Le trait continu représente la densité de probabilité tirée des estimations ponctuelles des paramètres. Le trait discontinu (qui se trouve presque superposé au trait continu) correspond à l'intervalle de confiance à 95 %. Il ressort clairement de ce graphique que, à en croire les résultats de la méthode de Monte-Carlo, la densité de probabilité est entachée d'une très faible incertitude.

Ainsi que nous l'avons fait remarquer, on veut souvent pouvoir faire des déductions à partir des densités de probabilité estimées; il devient alors intéressant de connaître l'incertitude qui entoure ces déductions. Par exemple, d'après les estimations ponctuelles des paramètres, on peut dire que le marché attribue une probabilité de 33 % à un taux d'intérêt supérieur à 3,6 % à la date d'expiration des options. C'est-à-dire que

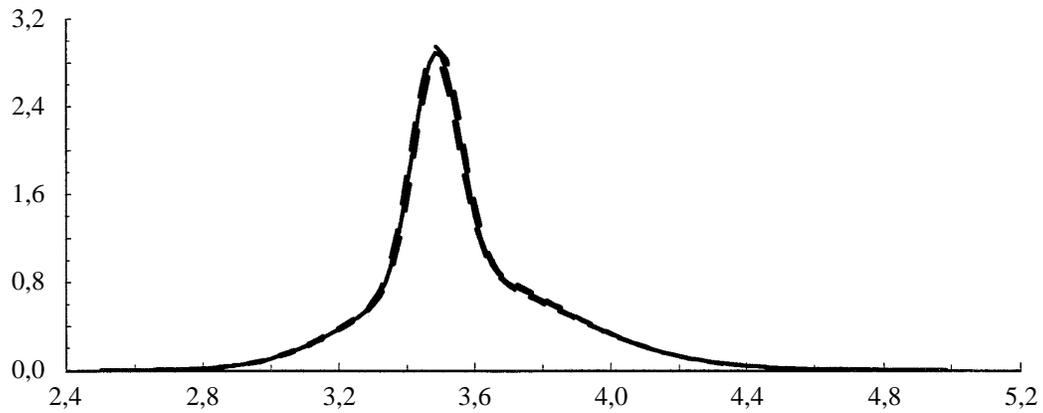
$$Pr_{\hat{\theta}}[f \geq 3,6 \%] = G[3,6; \hat{\theta}] \equiv \int_{3,6}^{\infty} g[f; \hat{\theta}] df = 33 \%.$$

Pour évaluer la robustesse de cette estimation ponctuelle de 33 points de pourcentage, nous calculons  $G[3,6 \%; \hat{\theta}^i]$ , la probabilité que le taux d'intérêt réalisé soit supérieur à 3,6 %, pour chaque  $\hat{\theta}^i \in \hat{\Theta}$ . La partie inférieure de la Figure 13 présente un histogramme de ces probabilités. Comme on peut s'y attendre compte tenu de l'étroitesse de l'intervalle de confiance entourant la densité de probabilité estimée, notre estimation ponctuelle de 33 % est entachée de peu d'incertitude, selon la méthode de Monte-Carlo.

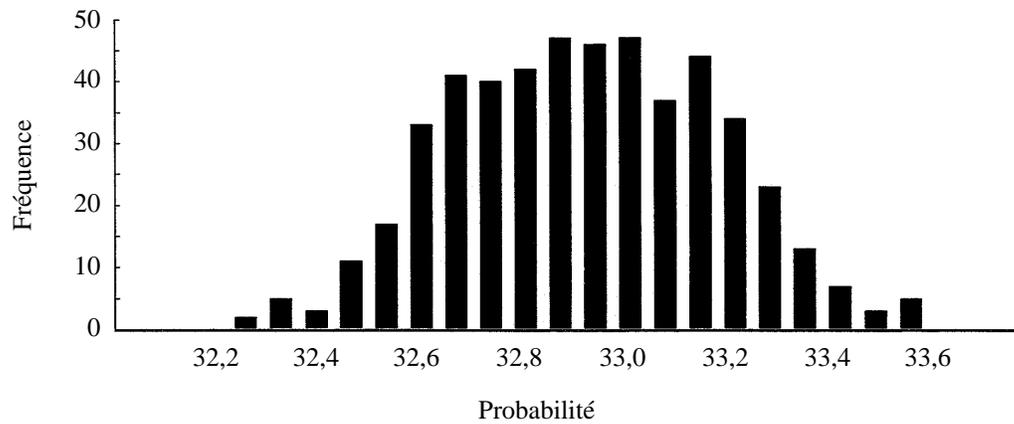
**Figure 13**

**Résultats de la méthode de Monte-Carlo**

Densité de probabilité estimée et intervalles de confiance à 95 %



Histogramme de fréquences (500 tirages) de la probabilité (contrat à terme > 3,6 %)



Plusieurs facteurs nous incitent à mettre en doute les intervalles de confiance que produit cette méthode. Sa validité repose sur l'indépendance des termes d'erreur et sur certaines conditions de régularité. Or il est clair, à l'examen de la partie inférieure de la Figure 12, que les erreurs ne sont pas indépendantes et que les contraintes imposées aux paramètres estimés invalident certaines des conditions de régularité que présuppose la méthode de Monte-Carlo.

### 3.5 Méthode de rééchantillonnage *bootstrap*

Cette méthode est conçue pour les situations où, comme ici, on hésite à imposer une structure quelconque aux termes d'erreur. Le principe consiste à créer un pseudo-échantillon au moyen de tirages (avec remplacement) effectués dans l'ensemble des observations disponibles, puis à estimer le modèle sur ce pseudo-échantillon. En répétant le processus à de multiples reprises, on obtient un ensemble d'estimations des paramètres. La distribution des estimations dans cet ensemble reproduira la véritable distribution des valeurs estimées des paramètres, à condition que notre ensemble initial d'observations soit un échantillon représentatif de la réalité.

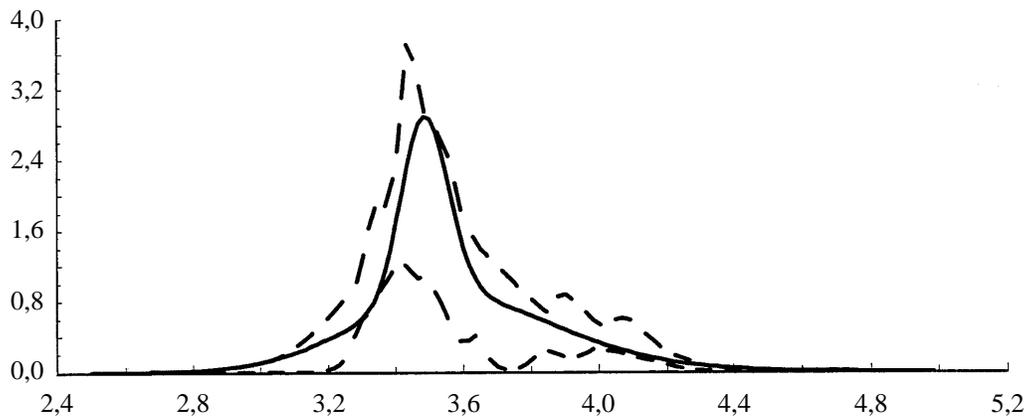
La partie supérieure de la Figure 14 présente la densité de probabilité tirée de l'estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance ainsi que les intervalles de confiance à 95 % produits par la méthode *bootstrap*. Il convient de noter que les intervalles de confiance sont beaucoup plus larges que ce n'était le cas avec la méthode de Monte-Carlo. Le graphique du bas est un histogramme de la probabilité que le taux d'intérêt soit supérieur à 3,6 %. Comme le laissaient prévoir les larges intervalles de confiance entourant la densité de probabilité, l'histogramme indique que notre estimation ponctuelle de cette probabilité n'est pas digne de confiance.

La large plage qui caractérise les estimations produites par la méthode *bootstrap* tient davantage au caractère particulier du problème d'estimation qu'à la structure des termes d'erreur. Comme nous l'avons déjà indiqué, le prix d'une option d'achat peut s'exprimer sous la forme du produit de deux termes : la masse des probabilités que  $f$  soit supérieur au prix d'exercice et la valeur anticipée de  $f$  si  $f$  est supérieur au prix d'exercice. Il existe un grand nombre de distributions pour lesquelles ce produit est identique. Ce qui nous permet de déterminer la distribution sous-jacente, ou de faire un choix entre celles se caractérisant par un même produit dans la queue de la distribution au delà du prix d'exercice, est le fait que, pour la majeure partie du support de la fonction, nous disposons d'un prix d'option observé pour le prix d'exercice immédiatement supérieur. Le prix de cette option au prix d'exercice immédiatement supérieur traduit sa propre masse de probabilité et sa propre espérance conditionnelle. Ensemble, les

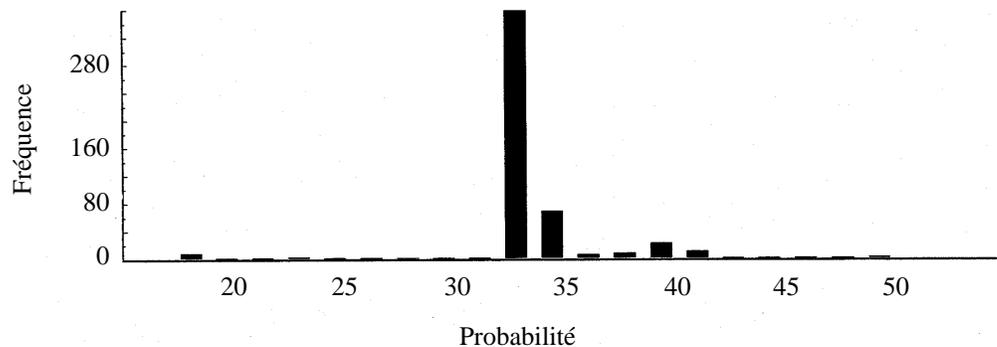
**Figure 14**

**Résultats de la méthode de rééchantillonnage *bootstrap***

Densité de probabilité estimée et intervalles de confiance à 95 %



Histogramme de fréquences (500 tirages) de la probabilité (contrat à terme > 3,6 %)



deux prix d'option permettent de déterminer la masse et l'espérance conditionnelle entre les deux prix d'exercice. Par conséquent, la technique d'estimation s'apparente à un processus inductif, où chaque élément dépend dans une large mesure de celui qui le précède.

Lorsqu'on construit des pseudo-échantillons aléatoires à partir des observations, ainsi que le veut la méthode *bootstrap*, on ne respecte pas ce

caractère inductif du processus d'estimation. Par conséquent, dans un grand nombre des pseudo-échantillons, il existe des intervalles relativement importants entre les prix d'exercice et, souvent, les prix d'exercice le plus élevé et le plus bas sont sous-représentés. Quand cela se produit, la distribution est mal identifiée, ce qui explique pourquoi les pseudo-échantillons produisent un large éventail d'estimations.

## Conclusions

Comme nous l'avons démontré dans la première section, l'information véhiculée par le prix des options est utile pour l'analyse de nombreuses questions qui intéressent les autorités monétaires. Cependant, un bon nombre des questions les plus intéressantes nécessitent des comparaisons de l'opinion des marchés sur une période relativement longue. On commence tout juste à adapter les techniques récentes d'extraction de l'information à partir du prix des options de manière à pouvoir procéder à ces comparaisons. À en juger par les résultats présentés dans la deuxième section, la capacité des techniques de régression de corriger les statistiques sommaires de façon à permettre des comparaisons sur de longues périodes est prometteuse.

Comme dans tout calcul statistique, il faut s'interroger sur la précision des estimations obtenues à partir du prix des options. Dans la troisième section, nous avons mis en lumière les défauts des méthodes standards de Monte-Carlo et de rééchantillonnage *bootstrap*. En un mot, la méthode de Monte-Carlo repose sur certaines conditions de régularité (normalité et indépendance) auxquelles, de toute évidence, les données relatives aux options ne répondent pas. C'est pourquoi nous mettons en doute les intervalles de confiance extrêmement étroits que produit cette méthode. La méthode *bootstrap*, qui ne requiert pas ces conditions de régularité, ne permet pas, malgré tout, de chiffrer convenablement l'incertitude. Le problème est dû, dans ce cas, à l'interdépendance particulière des mesures de probabilité tirées du prix des options ayant des prix d'exercice adjacents. Les recherches ultérieures dans ce domaine nécessiteront une modélisation explicite de cette dépendance.

## Bibliographie

- Bahra, B. (1996). « Probability Distributions of Future Asset Prices Implied by Option Prices », *Bank of England Quarterly Bulletin*, vol. 36, août, p. 299-311.
- Barone-Adesi, G. et R. Whaley (1987). « Efficient Analytic Approximation of American Option Values », *Journal of Finance*, vol. 42, avril, p. 301-320.
- Bates, D. (1991). « The Crash of '87: Was It Expected? The Evidence From Options Markets », *Journal of Finance*, vol. 46, juillet, p. 1009-1044.

- Breeden, D. et R. Litzenberger (1978). « Prices of State-contingent Claims Implicit in Option Prices », *Journal of Business*, vol. 51, n° 4, p. 621-651.
- Butler, C. et H. Davies (1998). « Assessing Market Views on Monetary Policy: The Use of Implied Risk Neutral Probability Distributions », communication présentée à un colloque portant sur les prix des actifs et la politique monétaire, organisé par la Banque des Règlements Internationaux et le Centre for Economic Policy Research, janvier.
- Cox, J. et S. Ross (1976). « The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes », *Journal of Financial Economics*, vol. 3, n°s 1-2, p. 145-166.
- Ma, C., J. Mercer et M. Walker (1992). « Rolling over Futures Contracts: A Note », *Journal of Futures Markets*, vol. 12, n° 2, p. 203-217.
- Malz, A. (1996). « Using Option Prices to Estimate Realignment Probabilities in the European Monetary System: The Case of Sterling-Mark », *Journal of International Money and Finance*, vol. 15, octobre, p. 717-748.
- (1997). « Estimating the Probability Distribution of the Future Exchange Rate from Option Prices », *The Journal of Derivatives*, vol. 5, n° 2, p. 18-36.
- Melick, W. et C. Thomas (1997). « Recovering an Asset's Implied PDF from Option Prices: An Application to Crude Oil During the Gulf Crisis », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 32, n° 1, p. 91-115.
- Neuhaus, H. (1995). « The Information Content of Derivatives for Monetary Policy: Implied Volatilities and Probabilities », Discussion Paper n° 3/95, Economic Research Group, Deutsche Bundesbank.
- Rubinstein, M. (1994). « Implied Binomial Trees », *Journal of Finance*, vol. 49, juillet, p. 771-818.
- Sherrick, B., P. Garcia et V. Tirupattur (1996). « Recovering Probabilistic Information from Option Markets: Tests of Distributional Assumptions », *Journal of Futures Markets*, vol. 16, n° 5, p. 545-560.
- Shimko, D. (1993). « Bounds of Probability », *Risk*, vol. 6, n° 4, p. 33-37.
- Söderlind, P. et L. Svensson (1997). « New Techniques to Extract Market Expectations from Financial Instruments », *Journal of Monetary Economics*, vol. 40, octobre, p. 383-429.