

# *L'extraction de l'inflation attendue à partir des taux d'intérêt à terme au Canada*

---

*Joseph Atta-Mensah et Mingwei Yuan\**

## **Introduction**

Svensson (1993), Söderlind (1995) et Söderlind et Svensson (1997) soutiennent que les taux d'intérêt à terme (les taux d'intérêt nominaux convenus aujourd'hui pour une période commençant à une date ultérieure) pourraient constituer un indicateur de l'orientation de la politique monétaire. Ils préconisent l'utilisation du taux à terme à titre d'indicateur parce qu'il peut renseigner sur les taux d'intérêt à court terme futurs anticipés par le marché, l'évolution attendue de l'inflation et les primes de risque de façon générale.

La courbe de rendement renferme la même information que la courbe des taux à terme, mais cette dernière est plus facile à interpréter aux fins de la conduite de la politique monétaire. Alors que la courbe de rendement peut être considérée comme représentant les moyennes futures anticipées des variables étudiées, la courbe des taux à terme peut être interprétée, selon Svensson, comme le sentier d'évolution attendu de ces variables. Les taux à

---

\* *Nous aimerions remercier Charleen Adam, Bob Amano, Jean-Pierre Aubry, Kevin Clinton, Agathe Côté, Pierre Duguay, Walter Engert, Ben Siu Cheong Fung, Ron Lange, Jack Selody et les participants à un séminaire interne à la Banque du Canada pour leurs commentaires et critiques utiles, ainsi que pour leurs encouragements; leurs remarques nous ont permis d'améliorer sensiblement le document. Nous désirons exprimer tout spécialement notre reconnaissance à Rebecca Szeto pour la compétence et l'efficacité dont elle a fait preuve dans les recherches. Merci également à Lars E. O. Svensson, David Stréliski et David Watt, qui nous ont aimablement fourni leurs programmes informatiques, à l'aide desquels nous avons pu estimer les taux à terme et le modèle GARCH.*

terme permettent donc de distinguer plus facilement que la courbe de rendement les attentes à court, à moyen et à long terme.

Théoriquement, les taux à terme se composent de quatre éléments non observables : l'inflation future attendue, les taux d'intérêt réels anticipés, la prime de risque d'inflation et la prime de risque à terme. L'extraction de chacun de ces éléments n'est donc pas une tâche facile<sup>1</sup>. On pourrait connaître plus facilement l'inflation attendue si l'on disposait à la fois d'obligations à rendement nominal et d'obligations indexées sur l'inflation. Malheureusement, le marché des obligations indexées n'est pas suffisamment liquide au Canada, et l'on ne trouve que des obligations à long terme. Certains chercheurs ont adopté une méthode plus générale pour extraire l'inflation attendue : ils font simplement l'hypothèse que les taux d'intérêt réels sont constants et que la prime de risque d'inflation ainsi que la prime de risque à terme sont négligeables.

Notre but est de parvenir à extraire l'inflation future anticipée des taux à terme canadiens à l'aide d'une règle (ou d'une technique) proposée par Söderlind (1995). Nous tenterons plus précisément de répondre à la question suivante : si le taux à terme nominal augmente de 100 points de base, de combien l'inflation future attendue a-t-elle augmenté?

D'après la règle proposée par Söderlind, la distribution des attentes en matière d'inflation et des taux d'intérêt réels anticipés suit une loi normale conjointe, et les primes de risque d'inflation et de risque à terme sont constantes ou faibles<sup>2</sup>. L'extraction de l'inflation anticipée se ramène alors à un problème classique d'extraction du signal (Sargent, 1987). L'estimation optimale de la variation du taux d'inflation attendu en fonction des taux à terme implicites est une fonction linéaire où la variation du taux à terme est multipliée par un coefficient.

On peut se demander pourquoi une banque centrale devrait chercher à extraire les attentes d'inflation des taux d'intérêt à terme alors qu'elle dispose d'autres méthodes à cette fin. La réponse tient à la fréquence des données. La plupart des modèles de prévision de l'inflation font appel à des variables pour lesquelles on dispose de données mensuelles (ou, parfois, trimestrielles). Les décideurs peuvent donc, à l'aide de ces modèles, obtenir à une fréquence mensuelle des informations sur l'inflation attendue. En revanche, les données sur les taux à terme sont chaque jour renouvelées. Dans le cadre que nous proposons ici, les décideurs pourraient donc se servir

---

1. Söderlind et Svensson (1997) passent en revue d'autres méthodes permettant d'extraire les composantes des taux à terme.

2. Il convient de signaler que, d'après Evans (1998), Canova et Marrinan (1996), Bekaert, Hodrick et Marshall (1997), Hardouvelis (1988) et Jorion et Mishkin (1991), les primes de risque varient dans le temps.

des taux à terme pour obtenir une lecture journalière des attentes du marché au sujet de l'inflation future.

Dans la première partie de l'étude, nous nous servons d'un modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF) standard basé sur la consommation pour examiner l'importance de la prime de risque incorporée aux taux à terme au Canada ainsi que ses propriétés temporelles. Dans la suite du document, nous nous penchons sur la relation entre l'inflation attendue et les taux à terme.

D'après les coefficients estimés applicables aux taux à terme nominaux à différents horizons, on peut utiliser les taux à terme observés quotidiennement pour établir la structure temporelle de l'inflation attendue au cours d'une journée déterminée. Cette structure permet aussi d'évaluer l'effet de certaines mesures de politique monétaire. Par exemple, si l'on veut évaluer l'effet produit par l'annonce de l'établissement de cibles en matière d'inflation, on peut examiner la manière dont se comporte la structure temporelle des attentes d'inflation avant et après l'annonce par la banque centrale de son intention de viser de telles cibles.

Voici les principaux résultats de l'étude :

- Lorsqu'on fait l'hypothèse que l'inflation et la croissance de la consommation suivent un processus commun, les valeurs estimées de la prime de risque d'inflation et de la prime de risque à terme sont très faibles (moins de point de base pour l'inflation et de douze points de base pour les primes de risque à terme). L'effet de ces primes sur le coefficient de la règle d'évolution du taux à terme au Canada est donc négligeable.
- À l'horizon de quatre ans, chaque hausse de 100 points de base des taux à terme s'accompagne d'une augmentation de 40 à 50 points de base de l'inflation attendue.
- Les taux d'intérêt réels sont loin d'être constants au Canada et se révèlent généralement plus variables que les attentes d'inflation. Les taux d'intérêt réels sont plus volatils à court qu'à long terme.
- À court terme (entre un et cinq trimestres), les taux d'intérêt réels et l'inflation attendue ont tendance à évoluer dans le même sens, ce qui est conforme à l'interprétation voulant que les autorités monétaires réagissent à la hausse de l'inflation anticipée. Cependant, à plus long terme (de six à seize trimestres), les deux variables évoluent en sens inverse, ce qui est conforme à la thèse selon laquelle une hausse des taux d'intérêt à court terme réels, qui favorise une augmentation des taux d'intérêt à long terme réels, a également pour effet de freiner l'activité économique et de ralentir l'inflation.
- Juste après la conférence prononcée par le gouverneur John Crow à l'Université de l'Alberta, le 18 janvier 1988, sous les auspices de la

Fondation Eric J. Hanson, ainsi qu'après l'annonce, en février 1991 et en décembre 1993, de l'établissement de cibles en matière d'inflation venant concrétiser l'engagement général de la Banque du Canada et du gouvernement canadien envers la stabilité des prix, la structure temporelle des attentes d'inflation s'est déplacée vers le bas.

Nous présentons dans la prochaine section un bref aperçu de certaines études consacrées à la question. À la section 2, nous décrivons le modèle d'équilibre des actifs financiers basé sur la consommation qui sert à représenter la structure par échéance des taux à terme. Nous estimons aussi les primes de risque d'inflation et de risque à terme futures. La section 3 expose la règle d'extraction de l'inflation attendue à partir des taux à terme tandis que, à la section 4, nous étudions l'effet des principales annonces faites par la Banque du Canada sur la structure temporelle des attentes d'inflation. Nos conclusions figurent à la dernière section.

## 1 Contexte général

Svensson (1993) avance que les taux d'intérêt à terme recèlent de l'information sur l'inflation future. Söderlind et Svensson (1997) montrent que, en théorie, le taux à terme se compose de l'inflation future attendue, des taux d'intérêt réels anticipés, de la prime de risque d'inflation et de la prime de risque à terme. Analysant des données américaines et britanniques, Söderlind (1995) constate que la plupart, mais non la totalité, des variations des taux d'intérêt nominaux à terme correspondent à des changements des attentes en matière d'inflation. Il constate aussi que les taux d'intérêt réels sont loin d'être constants, mais qu'ils varient moins que l'inflation attendue. Il observe en outre une corrélation négative entre les anticipations d'inflation et les taux d'intérêt réels. À l'aide d'un modèle d'équilibre général, Söderlind calcule la prime de risque à terme et la prime de risque d'inflation nominales implicites, pour constater qu'elles sont toutes deux faibles (25 et 30 points de base respectivement lorsque le paramètre d'aversion pour le risque est fixé à une valeur élevée, soit 5).

Avant les travaux de Svensson (1993), d'autres chercheurs avaient établi que la pente de la courbe de rendement permettait de prévoir convenablement l'inflation attendue. Mentionnons à ce titre les études de Fama (1990), Mishkin (1988, 1990 et 1991), Lowe (1992), Frankel et Lown (1994) et Day et Lange (1997). Les auteurs de ces études se livrent à des régressions simples des variations de l'inflation sur l'écart de taux d'intérêt et examinent la signification statistique du coefficient estimé de l'écart; un coefficient significatif indique que l'écart permet de bien prévoir les variations futures du taux d'inflation. La différence entre ces études et la nôtre est que nous nous concentrons sur le sentier d'évolution futur de

l'inflation anticipé par le marché plutôt que sur l'inflation attendue moyenne.

Bekaert, Hodrick et Marshall (1997), Hardouvelis (1988) et Jorion et Mishkin (1991) ont constaté la présence de primes de risque importantes et variables selon les périodes dans les données recueillies aux États-Unis. Evans (1998) étudie la structure temporelle des taux d'intérêt réels, de l'inflation anticipée et des primes de risque d'inflation au Royaume-Uni. Son analyse est fondée sur de nouvelles estimations de la structure des taux d'intérêt réels, qui est tirée des obligations indexées au Royaume-Uni. Les résultats d'Evans militent fortement en faveur d'un rejet de l'hypothèse de Fisher (l'hypothèse des anticipations relatives aux taux réels) et de la présence de primes de risque d'inflation variant dans le temps à toutes les échéances.

## 2 Modèle d'équilibre général relatif à la structure par échéance des taux à terme

Dans la présente section, nous employons un modèle standard d'équilibre des actifs financiers basé sur la consommation (MEDAF-C) pour exprimer la structure par échéance des taux à terme en fonction de l'inflation et de la croissance de la consommation. Afin d'extraire des taux à terme de l'information sur l'inflation future attendue, nous examinons la taille et le comportement temporel des primes de risque incorporées aux taux à terme canadiens. À cette fin, nous spécifions un processus conjoint, un modèle VAR(1)-ARCH(1) relatif à l'inflation et à la croissance de la consommation, qui permet aux variances-covariances de varier dans le temps. Nous estimons les paramètres du MEDAF-C en faisant appel aux taux à terme estimés à partir des statistiques du marché des bons du Trésor et du marché obligataire (dont il sera question à la section 3). Les paramètres estimés du modèle nous serviront ensuite à calculer les primes de risque.

### 2.1 Modèle relatif aux taux à terme théoriques

Nous considérons un MEDAF standard qui comporte une fonction d'utilité séparable dans le temps et dont la consommation ( $c_t$ ) est l'argument :

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad (1)$$

où  $\beta$  est le facteur d'actualisation et  $\gamma$  le paramètre d'aversion relative pour le risque, l'unité de temps étant le trimestre. Nous faisons l'hypothèse que l'agent économique peut choisir, entre autres véhicules de placement, des

obligations à taux nominal et des obligations à taux réel assorties d'échéances diverses. Désignons par  $r_{t,k}$  et  $R_{t,k}$  les rendements annualisés à l'échéance des obligations à taux réel et à taux nominal ayant une échéance  $k$ . On peut démontrer que

$$r_{t,k} = -\frac{4}{k} \ln E_t \left[ \beta^k \left( \frac{c_{t+k}}{c_t} \right)^{-\gamma} \right] \quad (2)$$

et

$$R_{t,k} = -\frac{4}{k} \ln E_t \left[ \beta^k \left( \frac{c_{t+k}}{c_t} \right)^{-\gamma} \left( \frac{P_{t+k}}{P_t} \right)^{-1} \right]. \quad (3)$$

Nous définissons maintenant le taux à terme,  $f_{t,k,q}$ , comme le rendement d'un contrat à terme dont l'échéance intervient dans  $q$  trimestres et le règlement dans  $k+q$  trimestres. Le taux à terme peut s'exprimer sous la forme

$$f_{t,k,q} = \frac{k+q}{q} R_{t,k+q} - \frac{k}{q} R_{t,k}. \quad (4)$$

Si nous adoptons l'hypothèse de normalité conditionnelle de la croissance de la consommation et de l'inflation, nous pouvons exprimer ainsi la relation entre les taux à terme et l'inflation future anticipée :

$$f_{t,k,q} = E_t r_{t+k,q} + E_t \pi_{t+k,q} + \Phi_{t,k,q}^f + \Phi_{t,k,q}^\pi, \quad (5)$$

où

$$E_t r_{t+k,q}, E_t \pi_{t+k,q}, \Phi_{t,k,q}^f \text{ et } \Phi_{t,k,q}^\pi$$

sont respectivement le taux d'intérêt réel futur attendu, l'inflation future anticipée, la prime de risque à terme future et la prime de risque d'inflation future, les trois dernières composantes étant définies comme

$$\begin{aligned} E_t \pi_{t+k,q} &= E_t \ln(P_{t+k+q}/P_{t+k}), \\ \Phi_{t,k,q}^f &= f_{t,k,q} - E_t R_{t+k,q}, \\ \Phi_{t,k,q}^\pi &= E_t R_{t+k,q} - E_t r_{t+k,q} - E_t \pi_{t+k,q}. \end{aligned} \quad (6)$$

L'équation (5) montre que la prévisibilité de l'inflation attendue en fonction des taux à terme dépend de trois autres variables, les taux d'intérêt réels futurs anticipés, la prime de risque à terme future et la prime de risque d'inflation future. Si l'on retient des hypothèses extrêmes, comme la constance des taux d'intérêt réels anticipés, de la prime de risque à terme et

de la prime de risque d'inflation, toute fluctuation des taux à terme doit être attribuée aux variations de l'inflation attendue. Or, les études démontrent que les taux d'intérêt réels ne sont pas constants et présentent une corrélation avec l'inflation anticipée. Les deux primes de risque pourraient également influencer sur la relation entre les taux à terme et l'inflation attendue.

L'équation (5) forme la base de la règle d'évolution du taux à terme que d'autres auteurs, notamment Söderlind (1995), utilisent pour extraire des taux à terme l'inflation future attendue. La règle repose cependant sur l'hypothèse que les primes de risque, dans l'équation (5), sont soit constantes, soit négligeables. Dans la prochaine sous-section, nous essayons d'évaluer l'importance de la prime de risque au Canada et de voir si elle influence sur le coefficient de la règle d'évolution du taux à terme.

## 2.2 Examen des primes de risque d'inflation et de risque à terme

Avant d'estimer la prime de risque d'inflation et la prime de risque à terme, nous devons spécifier un processus conjoint d'inflation et de croissance de la consommation de type VAR(1)-ARCH(1). Nous pouvons ensuite obtenir des solutions à forme fermée pour les taux à terme et les primes de risque à terme, qui sont fonction du facteur d'actualisation et du paramètre d'aversion pour le risque dans le modèle ainsi que de la moyenne et des variances-covariances conditionnelles de l'inflation et de la croissance de la consommation. Nous estimons le facteur d'actualisation et le paramètre d'aversion pour le risque en faisant appel aux taux à terme estimés à partir du modèle de Svensson (voir la section 3). Les valeurs estimées des paramètres sont ensuite appliquées au calcul des primes de risque d'inflation et de risque à terme. Les détails du calcul sont présentés dans les paragraphes qui suivent.

### 2.2.1 Processus conjoint d'inflation et de croissance de la consommation de type VAR(1)-ARCH(1)

Nous adoptons les notations  $z_{1t} = \Delta \log P_t$ ,  $z_{2t} = \Delta \log c_t$ . et  $z_t = [z_{1t} \ z_{2t}]'$ . Nous faisons l'hypothèse que  $z_t$  suit un processus VAR(1)-ARCH(1), défini ainsi :

$$\begin{bmatrix} z_{1t} \\ z_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{01} \\ A_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1t-1} \\ z_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \sim N \left( 0, \begin{bmatrix} h_{1t} & h_{12t} \\ h_{12t} & h_{2t} \end{bmatrix} \right), \quad (7)$$

où les variances-covariances conditionnelles de l'inflation et de la croissance de la consommation obéissent à un processus ARCH(1) :

$$\begin{aligned} h_{1t} &= a_{01} + a_{11}u_{1t-1}^2, \\ h_{2t} &= a_{02} + a_{12}u_{2t-1}^2, \\ h_{12t} &= \rho(h_{1t}h_{2t})^{1/2}. \end{aligned} \quad (8)$$

L'équation (7) exprime le fait que l'inflation et la croissance de la consommation sont régies par un processus vectoriel autorégressif d'ordre 1. Les chocs, dans ce processus, ont une variance-covariance variable comme à l'équation (8). Nous faisons aussi l'hypothèse que le coefficient de corrélation entre l'inflation et la croissance de la consommation ( $\rho$ ) est constant.

Pour simplifier la notation, nous écrivons

$$\begin{aligned} B_0 &= \begin{bmatrix} A_{01} \\ A_{02} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad u_t = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}, \quad h_t = \begin{bmatrix} h_{1t} \\ h_{2t} \end{bmatrix}, \\ a_0 &= \begin{bmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{bmatrix}, \quad a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{12} \end{bmatrix} \text{ et } H_t = \begin{bmatrix} h_{1t} & h_{12t} \\ h_{12t} & h_{2t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La forme simplifiée du modèle VAR(1)-ARCH(1) représenté par les équations (7) et (8) est alors

$$\begin{aligned} z_t &= B_0 + B_1 z_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim N(0, H_t), \\ h_t &= a_0 + u'_{t-1} a_1 u'_{t-1}, \\ h_{12t} &= \rho(h_{1t}h_{2t})^{1/2}. \end{aligned} \quad (9)$$

### 2.2.2 Solution à forme fermée des taux à terme et des primes de risque

Nous montrons à l'Annexe 1 que, étant donné le processus VAR(1)-ARCH(1) qui vient d'être décrit, le rendement réel et le rendement nominal à l'échéance ainsi que l'inflation future attendue sont fonction de la moyenne et des variances-covariances conditionnelles de l'inflation et de la croissance de la consommation :

$$\begin{aligned}
E_t r_{t+(k,q)} &= -4 \ln \beta + \frac{4}{q} [0 \ \gamma] E_t \sum_{i=k+1}^{k+q} z_{t+i} \\
&\quad - \frac{4}{2q} [0 \ \gamma] E_t \text{Var}_{t+k} \left( \sum_{i=k+1}^{k+q} z_{t+i} \right) [0 \ \gamma]', \\
R_{t,k} &= -4 \ln \beta + \frac{4}{k} [1 \ \gamma] E_t \sum_{i=1}^k z_{t+i} \\
&\quad - \frac{4}{2k} [1 \ \gamma] \text{Var}_t \left( \sum_{i=1}^k z_{t+i} \right) [1 \ \gamma]', \\
E_t R_{t+k,q} &= -4 \ln \beta + \frac{4}{q} [1 \ \gamma] E_t \sum_{i=k+1}^{k+q} z_{t+i} \\
&\quad - \frac{4}{2q} [1 \ \gamma] E_t \text{Var}_{t+k} \left( \sum_{i=k+1}^{k+q} z_{t+i} \right) [1 \ \gamma]', \\
E_t \pi_{t+k,q} &= \frac{4}{q} [1 \ 0] E_t \sum_{i=k+1}^{k+q} z_{t+i}, \tag{10}
\end{aligned}$$

où les termes relatifs à la moyenne et aux variances-covariances conditionnelles de l'inflation et de la croissance de la consommation,

$$E_t \sum_{i=k+1}^{k+q} z_{t+i} \text{ et } E_t \text{Var}_{t+k} \left( \sum_{i=k+1}^{k+q} z_{t+i} \right),$$

sont également tirés de l'Annexe 1.

Ces équations sont ensuite substituées dans les équations (4) et (6) afin d'obtenir le taux à terme, la prime de risque d'inflation et la prime de risque à terme<sup>3</sup>. Les équations ayant trait à la prime de risque d'inflation et à la prime de risque à terme ne comprennent que les variances et les covariances conditionnelles de l'inflation et de la croissance de la consommation et le paramètre d'aversion pour le risque  $\gamma$ .

### 2.2.3 Résultats de l'estimation

Nous estimons d'abord le processus conjoint d'inflation et de croissance de la consommation de type VAR(1)-ARCH(1) à l'aide de données canadiennes. Nous prenons l'IPC comme indice de prix et les dépenses de consommation des particuliers en termes réels. La période d'estimation va du quatrième trimestre de 1961 au quatrième trimestre de 1997. Les résultats de l'estimation sont présentés au Tableau 1. Celui-ci montre que la plupart des valeurs estimées des paramètres sont significatives au seuil de 5 %. On peut déduire du Tableau 1 que l'écart-type non conditionnel de l'inflation sur la période d'estimation est de 2,40 points de pourcentage<sup>4</sup>. La valeur estimée du coefficient de corrélation entre l'inflation et la croissance de la consommation est de  $-0,2$ , ce qui implique une faible corrélation négative entre les deux variables.

Ensuite, à l'aide de la série de taux à terme de Svensson (dont il sera question à la section 3) à différents horizons ( $k$ ), nous introduisons les valeurs estimées des paramètres au Tableau 1 et un paramètre d'aversion pour le risque ( $\gamma$ ) de 5 dans les équations (4), (6) et (10) afin d'estimer les primes de risque d'inflation et de risque à terme<sup>5</sup>. Étant donné que les taux à terme de Svensson ne sont disponibles que du troisième trimestre de 1985 au deuxième trimestre de 1997, nous estimons les primes pour cette période en attribuant à  $q$  une valeur de 4. Signalons que l'estimation des primes ne dépend pas de  $\beta$ .

La Figure 1 illustre les primes de risque d'inflation et de risque à terme dans deux cas, lorsque  $k = 4$  trimestres et  $k = 8$  trimestres. Dans les deux cas, nous obtenons une prime de risque d'inflation de 0,74 point de base et une prime de risque à terme de 11,6 points de base. La prime de

3. On peut démontrer que l'expression des taux d'intérêt nominaux (équation (10)) est analogue au modèle à deux facteurs relatif à la structure par échéance des taux d'intérêt mis au point par Longstaff et Schwartz (1992) lorsque les deux facteurs sont le taux d'intérêt à court terme et la volatilité.

4. L'écart-type non conditionnel du taux d'inflation annualisé équivaut à  $\sqrt{(a_{01}/(1-a_{11}))} * 4 * 10\ 000$  (points de base). Le facteur est égal à 4 parce que nous estimons un modèle trimestriel.

5. Nous avons choisi la valeur 5 pour  $\gamma$  en raison de Söderlind (1995).

**Tableau 1****Résultats de l'estimation du processus VAR(1)-ARCH(1) (1961T4-1997T4)**

Paramètre	Valeur estimée	Écart-type	Statistique <i>t</i>	Signification
$A_{01}$	0,0009	0,00046	1,92158	0,05466
$A_{02}$	0,0114	0,00077	14,8912	0,00000
$A_{11}$	0,8380	0,0288	29,11450	0,00000
$A_{21}$	0,1114	0,0336	3,3193	0,00090
$A_{12}$	- 0,1409	0,0498	- 2,8286	0,00468
$A_{22}$	- 0,0557	0,0700	- 0,79539	0,42639
$a_{01}$	0,00003	0,00000	7,13577	0,00000
$a_{02}$	0,00008	0,00001	7,4662	0,00000
$a_{11}$	0,1679	0,1161	1,4455	0,14831
$a_{12}$	0,1596	0,0947	1,68572	0,09185
$\rho$	- 0,1740	0,0661	- 2,6340	0,00844

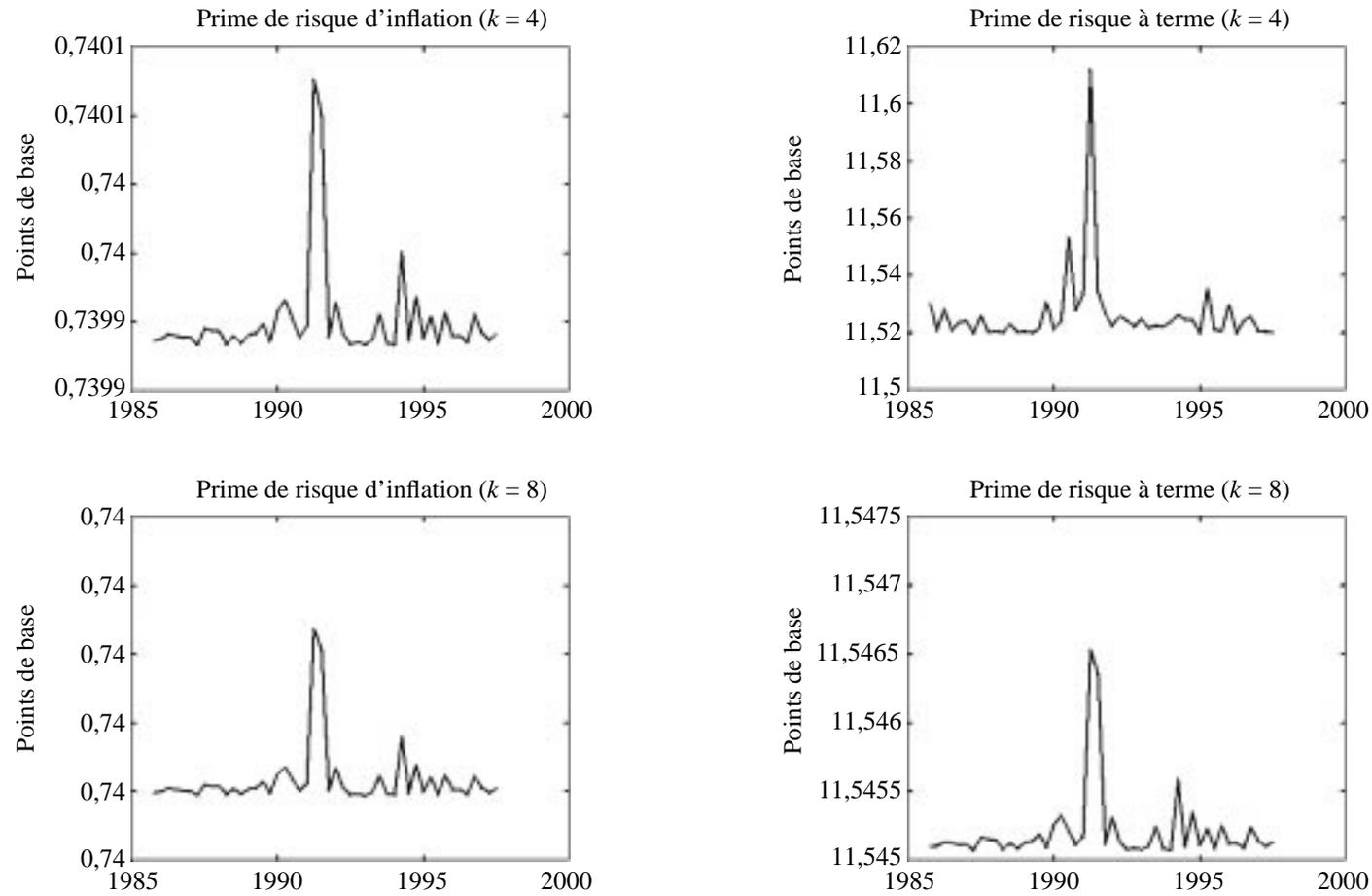
risque d'inflation de 0,74 point de base peut être considérée comme correspondant à un écart-type de 1,22 point de pourcentage de l'inflation, valeur plus faible que l'écart-type non conditionnel (2,40 points) calculé précédemment.

Il convient de signaler que notre estimation de la prime de risque d'inflation future est faible par rapport aux autres valeurs présentées dans la littérature. En prenant un paramètre d'aversion pour le risque ( $\gamma$ ) de 5, Söderlind estime à environ 30 points de base la prime de risque d'inflation aux États-Unis. À partir de données sur la consommation aux États-Unis et en donnant à  $\gamma$  une valeur de 2, Hahm (1998) estime la prime de risque d'inflation à environ 12 points de base. Nous recommandons la prudence dans la comparaison de nos résultats à ceux obtenus par d'autres auteurs, parce que la définition de la prime de risque peut différer selon le modèle. Notre définition fait appel à l'anticipation conditionnelle de la variance de l'inflation future. Par exemple, pour  $k = 4$ , la prime de risque d'inflation est liée à la variance conditionnelle de l'inflation à un horizon allant de un à deux ans.

Nous concluons de ce qui précède que les primes de risque d'inflation et de risque à terme jouent un rôle négligeable dans l'évolution des taux à terme au Canada et qu'elles ne devraient pas influencer sur les résultats de la prochaine étape de notre recherche empirique. Nous posons donc, dans les paragraphes qui suivent, que ces primes sont égales à zéro.

Figure 1

## Primes de risque d'inflation et de risque à terme à l'échéance de 12 mois



### 3 L'extraction des attentes d'inflation : la règle d'évolution du taux à terme

Ainsi que l'indique l'équation (5), le taux à terme se compose des éléments suivants : l'inflation future attendue, les taux d'intérêt réels anticipés, la prime de risque d'inflation et la prime de risque à terme. Étant donné que nous avons montré que ces primes étaient négligeables au Canada, nous pouvons nous limiter à l'étude des deux composantes qui restent : l'inflation future attendue et les taux d'intérêt réels anticipés. La séparation de ces deux composantes est un exercice classique d'extraction du signal<sup>6</sup>. Nous suivrons la méthode de Söderlind (1995) et la règle d'évolution du taux à terme pour extraire les attentes d'inflation des taux à terme canadiens.

#### 3.1 La règle d'évolution du taux à terme

Pour formuler cette règle, nous fixons à zéro les primes de risque d'inflation et de risque à terme dans l'équation (5). La règle tirée de l'équation (5) s'exprime ainsi :

$$\hat{\pi}_{t,k,q}^e = a_k + b_k f_{t,k,q}, \quad (11)$$

où  $\hat{\pi}_{t,k,q}^e$  est l'estimation de  $E_t \pi_{t+k,q}$  (l'inflation attendue) et  $a_k$  et  $b_k$  sont des coefficients.

À l'Annexe 2, nous montrons que  $b_k$  est de la forme suivante :

$$\hat{b}_k = \frac{1 + \rho_k \sigma_k}{1 + \sigma_k^2 + 2\rho_k \sigma_k}, \quad (12)$$

où

$$\begin{aligned} \sigma_k^2 &= \frac{\text{Var}(r_{t,k,q}^e)}{\text{Var}(\hat{\pi}_{t,k,q}^e)}, \\ \rho_k &= \text{Corr}(r_{t,k,q}^e, \hat{\pi}_{t,k,q}^e) \end{aligned} \quad (13)$$

et

$$r_{t,k,q}^e = f_{t,k,q} - \hat{\pi}_{t,k,q}^e.$$

6. Voir à ce sujet Sargent (1987), p. 229.

La valeur de  $b_k$  nous indique si le taux à terme est un bon indicateur de l'inflation attendue. Si  $b_k$  est égal à un, le taux à terme est une mesure parfaite de cette dernière; autrement dit, toute modification des taux à terme correspond à une variation de l'inflation attendue. Si, par exemple, le taux d'intérêt réel attendu est constant, c'est-à-dire  $\text{Var}(r_{t,k,q}^e) = 0$ , et  $b_k = 1$ , toute variation du taux à terme est attribuée à une modification de l'inflation attendue. Le ratio  $\sigma_k^2$  reflète la volatilité relative de l'inflation attendue à terme et du taux d'intérêt réel anticipé à terme, et  $\rho_k$  est le coefficient de corrélation de ces deux variables<sup>7</sup>.

Pour obtenir les estimations de  $b_k$ , nous devons disposer de données sur les taux à terme et l'inflation attendue. Nous allons maintenant voir comment nous élaborons ces séries.

### 3.2 L'estimation des taux à terme au Canada

Il y a plusieurs façons d'estimer les taux à terme implicites (voir le chapitre 2 de Anderson et coll., 1996). La plupart des estimations sont fondées sur des modèles qui estiment une fonction d'actualisation proposée initialement par McCulloch (1971). Nelson et Siegel (1987) représentent explicitement la courbe des taux à terme implicites plutôt que la structure par échéance des taux d'intérêt. Ils proposent une forme fonctionnelle qui permet de produire des courbes de taux à terme de formes variables, notamment une composante monotone et une composante en parabole inversée ou « bosse ». Svensson (1994b) donne encore plus de souplesse au modèle initial de Nelson et Siegel en ajoutant une seconde « bosse » à la courbe des taux à terme.

#### 3.2.1 Modèle de Svensson de 1994

Svensson (1994a et b) fait l'hypothèse que le taux à terme instantané est la solution d'une équation différentielle d'ordre 2 admettant trois racines. Étant donné une date de transaction  $t$  et une date de règlement  $m$ , désignons par  $f(m)$  le taux à terme instantané  $f(t, t + m)$ . La fonction de Svensson se lit ainsi :

$$f(m;b) = s_0 + s_1 \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) + s_2 \frac{m}{\tau_1} \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) + s_3 \frac{m}{\tau_2} \exp\left(-\frac{m}{\tau_2}\right),$$

où  $b = (s_0, s_1, s_2, s_3, \tau_1, \tau_2)$  est le vecteur des paramètres ( $s_0$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_2$  doivent être positifs).

---

7. Söderlind (1995) présente plusieurs scénarios possibles fondés sur différentes variabilités des taux d'intérêt réels anticipés et de l'inflation attendue.

Le taux à terme dans l'équation (13) se compose de trois éléments. Le premier est une constante,  $s_0$ , le deuxième est un terme exponentiel,  $s_1 \exp(-m/\tau_1)$ , qui décroît (ou croît si  $s_1$  est négatif) de façon monotone pour tendre vers zéro quand la date de règlement tend vers l'infini. Le troisième terme crée une « bosse » (ou un U si  $s_2$  est négatif) en fonction de la durée à courir jusqu'au règlement. Quand cette durée tend vers l'infini, le taux à terme tend vers la constante  $s_0$ , et quand elle tend vers zéro, le taux à terme tend vers la constante  $(s_0 + s_1)$ . Par conséquent, les termes  $s_0$  et  $s_0 + s_1$  ne doivent pas être négatifs afin que le taux au comptant instantané et le taux long ne prennent pas des valeurs négatives.

Signalons que l'ajout de Svensson au modèle de Nelson et Siegel (1987) est une seconde « bosse », qui est saisie par  $s_3(m/\tau_2)\exp(-m/\tau_2)$ . Svensson est d'avis que ce terme est nécessaire pour disposer de plus de souplesse et améliorer l'adéquation statistique de la courbe des taux à terme.

### 3.2.2 Méthode d'estimation

À partir des prix (ou des rendements) observables des obligations, des taux d'intérêt nominaux et des dates d'échéance, nous pouvons obtenir les valeurs estimées des paramètres d'une courbe des taux à terme implicites. Il s'agit de choisir les paramètres de manière à minimiser la somme des carrés des erreurs de prix (ou de rendement).

Cependant, la minimisation des erreurs de prix entraîne parfois des erreurs assez importantes dans le calcul du rendement des obligations et des bons ayant une faible durée à courir jusqu'à l'échéance (voir Svensson, 1994a et b). La raison en est que la somme de l'élasticité du prix de l'obligation par rapport à un et du rendement de l'obligation est égale à la durée de l'obligation (qui est la durée moyenne pondérée de réalisation des flux de trésorerie, y compris les paiements d'intérêts et le remboursement final). Pour les échéances courtes, les prix ne sont pas très sensibles aux rendements. Nous recommandons donc de choisir les paramètres de manière à minimiser les erreurs de rendement. Svensson (1994a et b) souligne également que, comme les analystes de la politique monétaire s'intéressent davantage aux taux d'intérêt qu'aux prix, il est logique de minimiser les erreurs sur le plan des rendements plutôt que sur celui des prix.

Notre technique consiste à minimiser les erreurs de rendement en faisant l'hypothèse que le rendement observé jusqu'à l'échéance est égal au rendement estimé jusqu'à l'échéance plus un terme d'erreur. Les paramètres sont estimés de telle façon que les rendements estimés jusqu'à l'échéance correspondent aux rendements observés. Nous avons aussi fait l'hypothèse que la courbe des taux à terme commençait du côté gauche avec le taux à un

jour. Pour obtenir des précisions sur la technique d'estimation, on peut consulter l'annexe de Svensson (1994a et b).

Les taux à terme implicites sont estimés à partir des chiffres bruts se rapportant aux obligations et aux bons du Trésor canadiens. À l'aide des programmes de Gauss mis à notre disposition par Svensson, nous introduisons les rendements, les taux d'intérêt nominaux et les dates d'échéance pour des termes de 1 jour, de 3, 6 et 12 mois et de 2 à 10, 15, 20 et 30 ans. La période d'estimation mensuelle va de juillet 1985 à juin 1997. Pour chaque mois, nous retenons les données de la date de transaction, le premier mercredi du mois (ou le premier jeudi si le premier mercredi est un jour férié).

### **3.3 L'estimation de l'inflation attendue à l'aide d'un modèle vectoriel à correction d'erreurs fondé sur les déséquilibres de M1**

Pour évaluer la règle d'évolution du taux à terme, nous estimons l'inflation attendue à l'aide d'un modèle vectoriel à correction d'erreurs (MVCE) s'inspirant des travaux d'Armour, Atta-Mensah, Engert et Hendry (1996), d'Engert et Hendry (1998) et d'Engert, Hendry et Yuan (1998). Le MVCE, qui est fondé sur la demande à long terme de M1 estimée par Hendry (1995), est formé de quatre équations représentant M1, l'IPC, le PIB réel et le taux du papier commercial à 90 jours. Ce modèle est axé sur les effets que les écarts de M1 par rapport à son niveau de long terme exercent sur le taux d'inflation. Outre des variables endogènes retardées, le modèle inclut le taux d'intérêt à court terme aux États-Unis, le taux de change et une mesure simple de l'écart de production. La capacité de prévision de l'inflation du MVCE a été examinée dans les études mentionnées précédemment : les auteurs concluent que ce modèle fournit beaucoup d'information sur l'évolution future de l'inflation.

Les estimations de l'inflation attendue ont été obtenues au moyen de régressions sur échantillon mobile. Cette méthode consiste à estimer le MVCE du premier trimestre de 1950 au quatrième trimestre de 1979 et à prévoir le niveau des prix à un horizon de  $k + 4$  trimestres pour  $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$  et  $16$ . L'estimation de l'inflation anticipée de  $t + k$  à  $t + k + 4$  est donnée par  $\ln P_{t+k+4} - \ln P_{t+k}$ . Nous estimons à nouveau le modèle en ajoutant un trimestre à la fois à l'échantillon et procédons chaque fois à une prévision du niveau des prix à l'horizon de  $k + 4$  trimestres et au calcul de l'inflation attendue correspondante. Nous répétons l'opération jusqu'à ce que tous les points de données aient été utilisés.

Pour que nos calculs correspondent aux données disponibles sur les taux à terme, nous avons estimé l'inflation du troisième trimestre de 1985 au

deuxième trimestre de 1997. Étant donné que le MVCE fait appel à des données trimestrielles, les taux à terme estimés ont été convertis en données trimestrielles pour permettre d'évaluer la règle d'évolution du taux à terme.

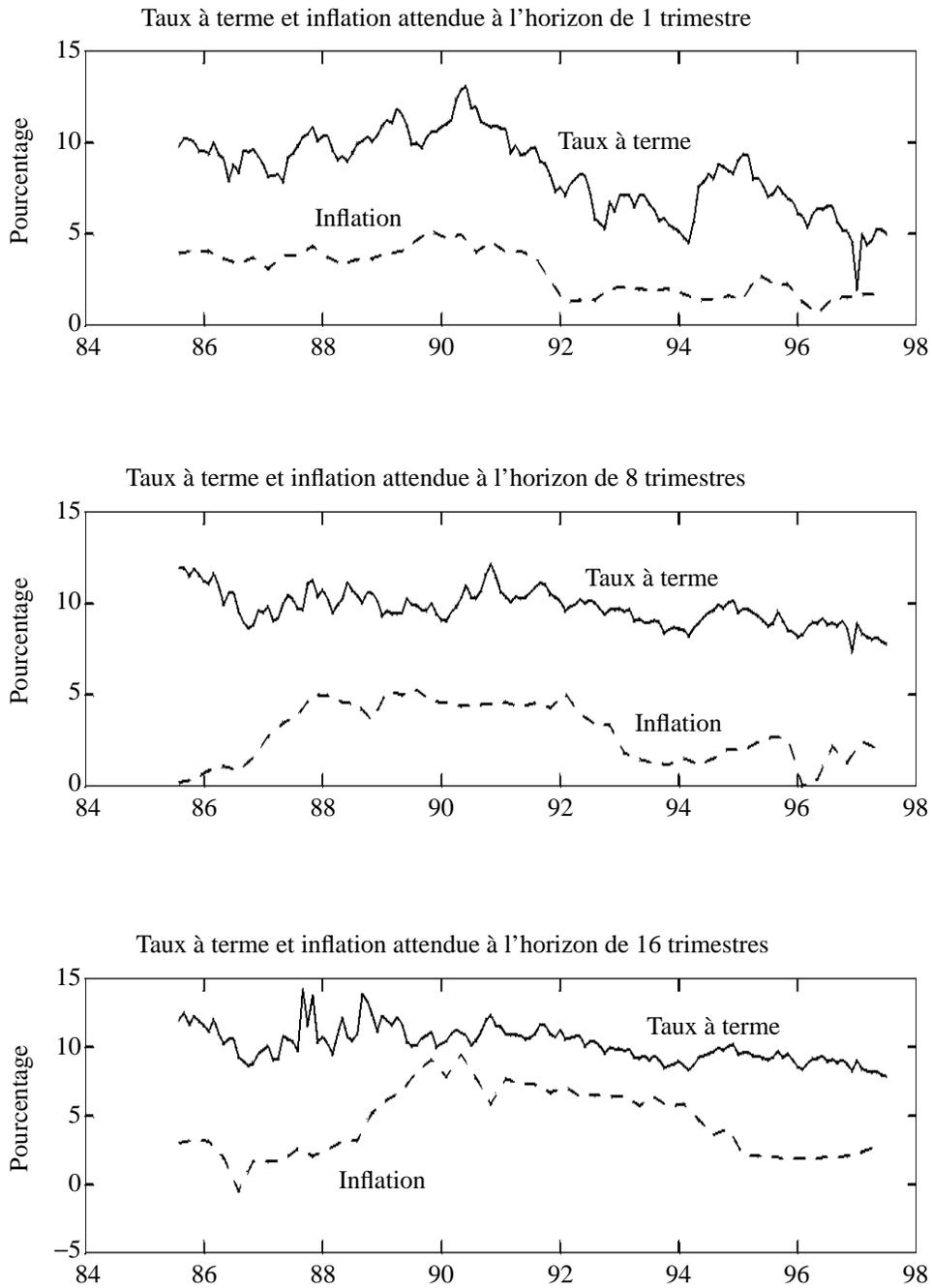
La Figure 2 illustre le taux d'inflation attendu et les taux à terme nominaux à différents horizons. Les graphiques montrent que la valeur anticipée de l'inflation future suit à peu près la même tendance que les taux à terme.

### 3.4 L'inflation attendue et la règle d'évolution du taux à terme

Nous étudions maintenant la relation entre la valeur de l'inflation attendue générée par le MVCE et les taux à terme estimés au moyen du modèle de Svensson. Autrement dit, nous examinons la règle d'évolution du taux à terme décrite à la section 3.1. Avant cela, toutefois, nous obtenons le taux d'intérêt réel anticipé en calculant la différence entre les taux à terme nominaux et l'inflation attendue (dont la valeur a été générée par le MVCE). Le Tableau 2 présente les résultats de cet examen.

Les coefficients  $b_k$  (voir l'équation (11)) sont le point de mire de notre évaluation. Les résultats présentés au Tableau 2 montrent qu'aux échéances rapprochées (horizon d'un à quatre trimestres), les attentes d'inflation varient de 38 à 41 points de base quand les taux à terme se modifient de 100 points de base. À moyen terme (horizon de cinq à huit trimestres), la variation de l'inflation attendue pour un changement de 100 points de base du taux à terme se situe entre 50 et 55 points de base. À plus long terme (horizon de douze à seize trimestres), l'inflation anticipée varie de 36 à 40 points de base pour chaque changement de 100 points de base des taux à terme.

En résumé, les résultats indiquent que, lorsque le taux à terme augmente d'un point de pourcentage, l'inflation anticipée s'accroît d'un demi-point ou moins. Si les taux d'intérêt réels étaient constants, les taux à terme et l'inflation anticipée devraient varier dans la même proportion. Le fait que  $b_k$  soit inférieur à un implique que les taux d'intérêt réels sont loin d'être constants. À l'aide de données américaines, Söderlind (1995) estime que  $b_k$  est égal à 0,56 pour  $k = 4$  et à 0,27 pour  $k = 8$ . Avec un échantillon plus petit, il porte ses estimations à 0,98 pour  $k = 4$  et à 0,56 pour  $k = 8$ . Mishkin (1990), qui étudie la relation entre les écarts de taux d'intérêt et l'inflation future, conclut pour sa part que les taux d'intérêt renferment de l'information sur les taux d'inflation à l'horizon de six à douze mois. Selon ses estimations,  $b_k$  se situerait entre 0,7 et 1,5. Nos résultats donnent à penser qu'au Canada, les taux à terme recèlent de l'information sur l'inflation future.

**Figure 2****Taux à terme et inflation attendue aux horizons de 1, 8 et 16 trimestres**

**Tableau 2****Évaluation de la règle d'évolution du taux à terme (1985T3-1997T2)**

$k$ (trimestres)	$b_k$	$\sigma_k$	$\rho_k$	EQM( $b_k$ )/EQM(1)
1	0,3806	1,5099	0,6885	0,0982
2	0,3810	1,4692	0,5813	0,1361
3	0,4001	1,3228	0,3793	0,2281
4	0,4136	1,2285	0,1778	0,3287
5	0,4972	1,0057	0,0035	0,4955
6	0,5543	0,9149	- 0,1849	0,6444
8	0,4903	1,0089	- 0,5447	0,7655
12	0,3957	1,0356	- 0,8331	0,8819
16	0,3650	1,0237	- 0,9134	0,9316

Le Tableau 2 présente des résultats relatifs à l'information véhiculée par différents taux à terme. D'après les valeurs de la volatilité relative du taux d'intérêt réel anticipé et de l'inflation attendue, la première variable fluctue davantage que la seconde aux échéances rapprochées (horizon de un à quatre trimestres). À moyen et à long terme (horizon de cinq à seize trimestres), nous constatons que le taux d'intérêt réel et l'inflation anticipée fluctuent à peu près dans les mêmes proportions. Les valeurs des coefficients  $\sigma_k$  diffèrent légèrement de celles que trouve Söderlind (1995). Selon ce dernier, la valeur de  $\sigma_k$  est de 0,59 pour  $k = 4$  et de 1,32 pour  $k = 8$ , quand l'échantillon va du deuxième trimestre de 1958 au quatrième trimestre de 1990 (à l'exclusion des années 1982 à 1985). Les valeurs de  $\sigma_k$  sont de 0,93 et de 1,32 pour  $k = 4$  et  $k = 8$  respectivement lorsque la totalité de l'échantillon est utilisée. Ces résultats signifient que non seulement les taux d'intérêt réels au Canada varient dans le temps, mais qu'ils sont très volatils, en particulier aux échéances rapprochées.

Le Tableau 2 fait également ressortir que les corrélations entre les taux d'intérêt à terme réels anticipés et l'inflation attendue sont positives dans le compartiment du court terme (un à cinq trimestres) et négatives à plus long terme. Ce résultat est conforme au point de vue selon lequel les autorités monétaires réagissent en courte période à une hausse de l'inflation attendue en relevant les taux nominaux dans une proportion supérieure à cette hausse, ce qui fait monter le taux d'intérêt réel. En courte période, donc, les taux d'intérêt réels et l'inflation attendue varient dans le même sens (le coefficient de corrélation est positif). À plus long terme, le niveau plus élevé des taux d'intérêt réels futurs freine l'activité économique future. La corrélation négative observée entre les taux réels et l'activité économique réelle, qui trouve son origine dans le secteur réel, se combine à une relation négative entre l'inflation attendue et l'activité réelle, provenant elle du secteur monétaire, ce qui entraîne une relation négative entre l'inflation attendue et les taux réels attendus. Par conséquent, en longue période, les

taux réels et l'inflation anticipée évoluent en sens contraire (le coefficient de corrélation est négatif).

Nous présentons aussi le rapport des erreurs quadratiques moyennes calculées avec la valeur estimée de  $b_k$  et  $b_k = 1$ , soit  $EQM(b_k)/EQM(1)$ . Il s'agit d'une « mesure de l'efficacité » des taux à terme à titre d'indicateurs de l'inflation anticipée. On peut montrer que  $EQM(b_k)/EQM(1) = (1 - \rho_k^2)/(1 + \sigma_k^2 + 2\rho_k\sigma_k)$ . Les résultats indiquent que nos estimations de l'efficacité relative de la règle d'évolution du taux à terme sont généralement très robustes quand l'horizon va de six à seize trimestres. Les estimations se situent entre 0,64 et 0,93 pour ces termes.

Nous avons montré de façon empirique, au moyen de la règle d'évolution du taux à terme, qu'il existe une relation entre les taux à terme et l'inflation attendue. Nous constatons cependant que les taux à terme et l'inflation attendue ne varient pas dans la même mesure. Nous soutenons que la non-conformité de cette relation à la règle de Fisher est due au fait que les taux d'intérêt réels ne sont pas constants.

#### **4 La politique de stabilité des prix et le comportement de l'inflation attendue**

Dans la présente section, nous examinons le comportement de la structure temporelle de l'inflation attendue, en nous fondant sur les estimations fournies par la règle d'évolution du taux à terme. Nous évaluons en particulier l'effet de trois faits marquants dans l'évolution de la politique de la Banque du Canada à l'égard de la stabilité des prix : 1) la conférence donnée en janvier 1988 par le gouverneur Crow sous les auspices de la Fondation Hanson; 2) l'annonce de l'établissement de cibles en matière d'inflation faite conjointement en février 1991 par la Banque et le gouvernement canadien; 3) leur deuxième déclaration conjointe, en décembre 1993, annonçant la reconduction des cibles.

La Banque du Canada a fait connaître son intention d'adopter la stabilité des prix comme objectif lors de la conférence prononcée par le gouverneur John Crow sous les auspices de la Fondation Hanson<sup>8</sup>. Dans ce discours, le gouverneur Crow (1988) soulignait que la politique monétaire visait la stabilité des prix<sup>9</sup>.

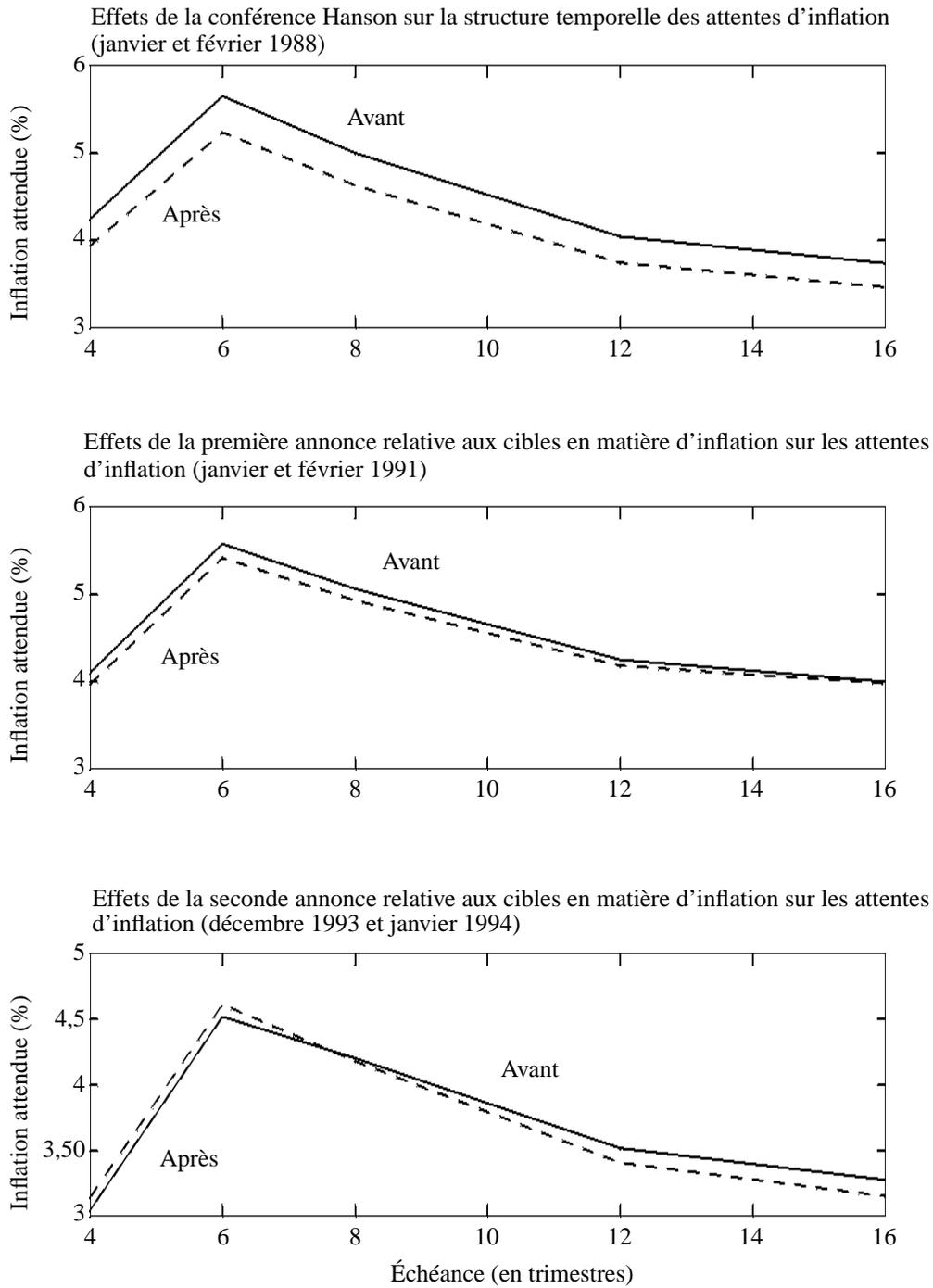
Pour évaluer l'effet de la conférence du gouverneur Crow sur la perception de l'inflation future par les agents économiques, nous avons représenté à la Figure 3 la structure temporelle de l'inflation attendue,

8. Voir Laidler et Robson (1993).

9. Cet objectif avait été énoncé par le gouverneur Gerald Bouey dès 1984, mais on n'y avait pas accordé alors autant d'attention. Voir Banque du Canada (1984), p. 7.

**Figure 3**

**Effets d'annonce : structure temporelle de l'inflation attendue au voisinage des dates d'annonce des cibles en matière d'inflation**



générée par la règle d'évolution du taux à terme, pour les mois de janvier et février 1988. Comme le montre le graphique du haut dans les Figures 3 et 4, cette allocution semble avoir eu un effet sur les attentes des agents économiques en la matière. Après la conférence, ces derniers ont immédiatement révisé à la baisse, de 30 à 40 points de base, leurs attentes d'inflation; la révision la plus forte a été observée à l'horizon de six trimestres.

En février 1991, la Banque du Canada et le gouvernement canadien ont annoncé ensemble que le Canada se dotait de cibles de réduction de l'inflation. L'objectif était de ramener le taux d'inflation mesuré par la variation sur douze mois de l'IPC à 3 % pour la fin de 1992, à 2,5 % pour le milieu de 1994 et à 2 % pour la fin de 1995. Le graphique du milieu des Figures 3 et 4 montre que la structure temporelle des attentes d'inflation s'est orientée à la baisse après l'annonce. Le taux d'inflation anticipé n'a cependant diminué que de 3 à 15 points de base, la révision à la baisse étant plus marquée pour les échéances rapprochées que pour les échéances éloignées. Nous soupçonnons que le recul relativement faible des attentes d'inflation est attribuable au fait que la politique désinflationniste menée par la Banque avant cette annonce avait déjà eu un effet sur les attentes, de sorte que les agents économiques n'ont guère été surpris par la nouvelle. Il semble donc que celle-ci n'ait pas renforcé à elle seule les perspectives de stabilité des prix dans l'esprit des agents économiques.

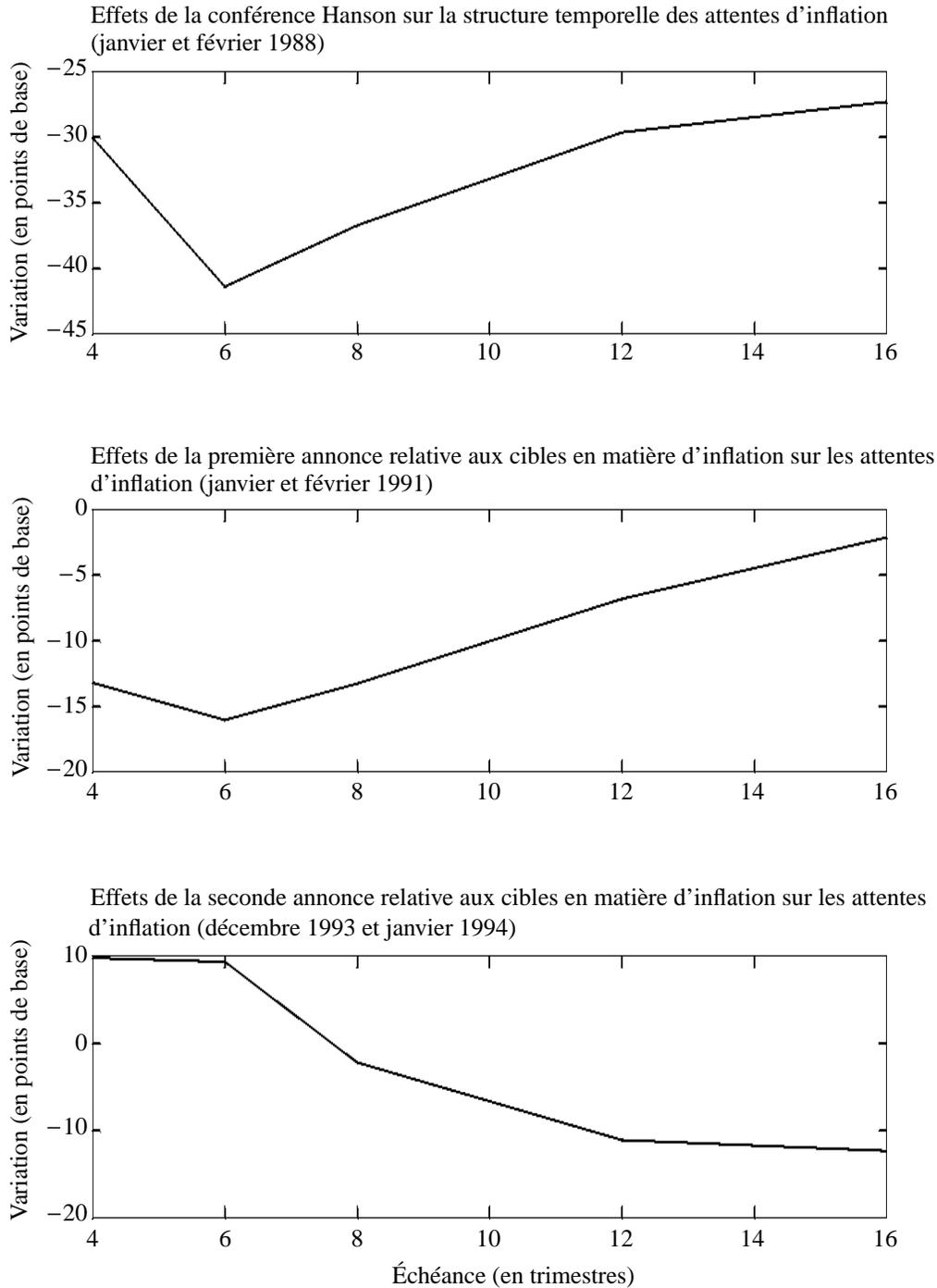
Le dernier événement que nous avons examiné est la deuxième annonce relative aux cibles en matière d'inflation, qui a été faite lors de la nomination du gouverneur Gordon Thiessen, en décembre 1993. La Banque et le gouvernement canadien ont alors annoncé qu'ils avaient convenu de prolonger l'application des cibles de la fin de 1995 à la fin de 1998, l'objectif étant de maintenir l'inflation dans une fourchette de 1 à 3 %. Le graphique du bas, aux Figures 3 et 4, montre que les anticipations ont à peine changé à un horizon rapproché, mais qu'elles ont été légèrement révisées à la baisse à un horizon lointain. Ces résultats cadrent avec le point de vue selon lequel les agents comptaient bien que la Banque allait maintenir le statu quo après le départ du gouverneur Crow.

## Conclusion

Nous avons entrepris dans cette étude de déterminer si les taux à terme au Canada sont de bons indicateurs de l'inflation attendue. Nos résultats indiquent que celle-ci varie de moins de 100 points de base quand les taux à terme fluctuent de 100 points de base. Nous constatons aussi que les taux d'intérêt réels sont très variables dans le temps. Selon nos résultats, ils seraient plus volatils que l'inflation anticipée. En recourant à un modèle d'équilibre général de l'économie, on constate que la prime de risque à

**Figure 4**

**Modification de la structure temporelle de l'inflation attendue au voisinage des dates d'annonce des cibles en matière d'inflation**



terme et la prime de risque d'inflation sont négligeables. Enfin, l'examen des faits qui ont marqué la dernière décennie montre que, juste après l'annonce par la Banque du Canada de l'établissement de cibles en matière d'inflation, les agents économiques ont semblé réviser à la baisse leurs attentes d'inflation.

## Annexe 1

### Les solutions à forme fermée du modèle théorique

Dans cette annexe, nous calculons d'abord la moyenne et la variance-covariance conditionnelles d'un processus VAR(1)-ARCH(1), pour nous en servir ensuite dans les conditions d'équilibre du modèle, à la section 2, afin d'obtenir les solutions à forme fermée pour le taux à terme et ses composantes.

#### 1 Moyenne et variance-covariance conditionnelles d'un processus VAR(1)-ARCH(1)

Le processus  $z_t$  bivarié VAR(1)-ARCH(1) est défini sous la forme

$$\begin{aligned} z_t &= B_0 + B_1 z_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim N(0, H_t) \\ h_t &= a_0 + u'_{t-1} a_1 u'_{t-1}, \\ h_{12t} &= \rho(h_{1t} h_{2t})^{1/2}, \end{aligned}$$

où

$$a_0 = \begin{bmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{bmatrix}, \quad a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{12} \end{bmatrix}, \quad H_t = \begin{bmatrix} h_{1t} & h_{12t} \\ h_{12t} & h_{2t} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad h_t = \begin{bmatrix} h_{1t} \\ h_{2t} \end{bmatrix}.$$

La moyenne et la variance-covariance conditionnelles peuvent être calculées comme suit :

$$\begin{aligned} E_t \sum_{s=q}^r z_{t+s} &= B_0 \sum_{s=q}^r \sum_{i=1}^s B_1^{i-1} + \sum_{s=q}^r B_1^s z_t \\ E_t \text{Var}_{t+q-1} \sum_{s=q}^r z_{t+s} &= \sum_{s=q}^r \sum_{i=q}^s B_1^{r-i} \text{Var}_t(u_{t+i}) (B_1^{r-i})' . * \end{aligned}$$

---

\* Signalons que  $E_t \text{Var}_{t+q-1} \sum_{s=q}^r z_{t+s}$  diffère de  $\text{Var}_t \sum_{s=q}^r z_{t+s}$ , qui est égal à

$$\sum_{s=q}^r \sum_{i=1}^s B_1^{r-i} \text{Var}_t(u_{t+i}) (B_1^{r-i})'.$$

Cependant, on peut facilement démontrer que  $E_t \text{Var}_{t+q-1}(u_{t+i}) = \text{Var}_t(u_{t+i})$ .

Alors,

$$\text{Var}_t(u_{t+i}) = \begin{bmatrix} h_{1t+i} & h_{12t+i} \\ h_{12t+i} & h_{2t+i} \end{bmatrix}.$$

On peut montrer que

$$h_{1t+i} = \sigma_1^2 + a_{11}^{i-1} (h_{1t+1} - \sigma_1^2),$$

$$h_{2t+i} = \sigma_2^2 + a_{12}^{i-1} (h_{2t+1} - \sigma_2^2),$$

$$h_{12t+i} = \rho (h_{1t+1} h_{2t+1})^{1/2},$$

où

$$\sigma_j^2 = a_{0j} / (1 - a_{1j}) \text{ pour } j = 1, 2.$$

## 2 Solutions à forme fermée du modèle

Nous utilisons maintenant les formules de calcul précédentes de la moyenne et de la variance-covariance conditionnelles pour obtenir le taux à terme et ses composantes. Tout d'abord, le rendement à l'échéance annuel de l'obligation à rendement réel,  $r_{t,k}$ , s'exprime par

$$\begin{aligned} r_{t,k} &= -4 \ln \beta - \frac{4}{k} \ln E_t \left( \frac{c_{t+k}}{c_t} \right)^{-\gamma} \\ &= -4 \ln \beta + \frac{4}{k} [0 \ \gamma] E_t \sum_{i=1}^k z_{t+i} - \frac{4}{2k} [0 \ \gamma] E_t \text{Var}_t \sum_{i=1}^k z_{t+i} [0 \ \gamma]'. \end{aligned}$$

Le taux d'intérêt réel futur attendu est

$$\begin{aligned} E_t r_{t+k,q} &= -4 \ln \beta + \frac{4}{q} [0 \ \gamma] E_t \sum_{i=k+1}^{k+q} z_{t+i} \\ &\quad - \frac{4}{2k} [0 \ \gamma] E_t \text{Var}_{t+k} \sum_{i=k+1}^{k+q} z_{t+i} [0 \ \gamma]'. \end{aligned} \quad (\text{A1.1})$$

De même, le rendement à l'échéance annuel de l'obligation à rendement nominal,  $R_{t,k}$ , est

$$\begin{aligned}
R_{t,k} &= -4 \ln \beta - \frac{4}{k} \ln E_t \left[ \left( \frac{c_{t+k}}{c_t} \right)^{-\gamma} \left( \frac{P_{t+k}}{P_t} \right)^{-1} \right] \\
&= -4 \ln \beta + \frac{4}{k} [1 \ \gamma] E_t \sum_{i=1}^k z_{t+i} \\
&\quad - \frac{4}{2k} [1 \ \gamma] E_t \text{Var}_t \sum_{i=1}^k z_{t+i} [1 \ \gamma]'.
\end{aligned} \tag{A1.2}$$

Le taux d'intérêt nominal futur attendu est

$$\begin{aligned}
E_t R_{t+k,q} &= -4 \ln \beta + \frac{4}{q} [1 \ \gamma] E_t \sum_{i=k+1}^{k+q} z_{t+i} \\
&\quad - \frac{4}{2q} [1 \ \gamma] E_t \text{Var}_{t+k} \sum_{i=k+1}^{k+q} z_{t+i} [1 \ \gamma]'.
\end{aligned} \tag{A1.3}$$

Le taux d'inflation futur anticipé est

$$\begin{aligned}
E_t \pi_{t+k,q} &= \frac{4}{q} E_t \ln \frac{P_{t+k+q}}{P_{t+k}} \\
&= \frac{4}{q} [1 \ 0] E_t \sum_{i=k+1}^{k+q} z_{t+i}.
\end{aligned} \tag{A1.4}$$

À partir du rendement nominal à l'échéance (équation [A1.2]), il est facile d'obtenir le taux à terme :

$$f_{t,k,q} = \frac{k+q}{q} R_{t,k+q} - \frac{k}{q} R_{t,k}. \tag{A1.5}$$

Les primes de risque incorporées aux taux à terme sont calculées ainsi :

$$\begin{aligned}
\Phi_{t,k,q}^f &= f_{t,k,q} - E_t R_{t+(k,q)}, \\
\Phi_{t,k,q}^\pi &= E_t R_{t+(k,q)} - E_t r_{t+k,q} - \pi_{t,k,q}^e.
\end{aligned} \tag{A1.6}$$

Les équations (A1.1), (A1.4) et (A1.6) définissent les quatre composantes du taux à terme (équation [A1.5] ci-dessus) dans l'équation (5).

## Annexe 2

### Calcul du coefficient de la règle d'évolution du taux à terme

La règle d'évolution du taux à terme veut que celui-ci permette de prévoir selon une fonction linéaire le taux d'inflation attendu :

$$\hat{\pi}_{t,k,q}^e = a + b_k f_{t,k,q}, \quad (\text{A2.1})$$

où

$$\hat{b}_k = \frac{\text{Cov}(f_{t,k,q}, \hat{\pi}_{t,k,q}^e)}{\text{Var}(f_{t,k,q})}. \quad (\text{A2.2})$$

On sait que le taux à terme est la somme des taux d'intérêt réels futurs attendus, de l'inflation future anticipée, de la prime de risque d'inflation et de la prime de risque à terme nominale. Si l'on fait l'hypothèse que la prime de risque d'inflation et la prime de risque à terme nominale sont constantes ou égales à zéro, nous pouvons exprimer (A2.2) de la façon suivante :

$$\hat{b}_k = \frac{\text{Cov}((r_{t,k,q}^e + \hat{\pi}_{t,k,q}^e), \hat{\pi}_{t,k,q}^e)}{\text{Var}(r_{t,k,q}^e + \hat{\pi}_{t,k,q}^e)}. \quad (\text{A2.3})$$

À l'aide de la règle  $\text{Cov}(x + y, z) = \text{Cov}(x, z) + \text{Cov}(y, z)$ , nous pouvons exprimer (A2.3) sous la forme

$$\hat{b}_k = \frac{\text{Cov}(r_{t,k,q}^e, \hat{\pi}_{t,k,q}^e) + \text{Var}(\hat{\pi}_{t,k,q}^e)}{\text{Var}(r_{t,k,q}^e + \hat{\pi}_{t,k,q}^e)}.$$

Par développement, nous obtenons

$$\hat{b}_k = \frac{\text{Cov}(r_{t,k,q}^e, \hat{\pi}_{t,k,q}^e) + \text{Var}(\hat{\pi}_{t,k,q}^e)}{\text{Var}(r_{t,k,q}^e) + \text{Var}(\hat{\pi}_{t,k,q}^e) + 2\text{Cov}(r_{t,k,q}^e, \hat{\pi}_{t,k,q}^e)}$$

ou encore

$$\hat{b}_k = \frac{1 + \rho_k \sigma_k}{1 + \sigma_k^2 + 2\rho_k \sigma_k},$$

où

$$\sigma_k^2 = \frac{\text{Var}(r_{t,k,q}^e)}{\text{Var}(\hat{\pi}_{t,k,q}^e)} \quad \rho_k = \text{Corr}(r_{t,k,q}^e, \hat{\pi}_{t,k,q}^e).$$

## Bibliographie

- Anderson, N., F. Breedon, M. Deacon et G. Murphy (1996). *Estimating and Interpreting the Yield Curve*, West Sussex, John Wiley and Sons.
- Armour J., J. Atta-Mensah, W. Engert et S. Hendry (1996). « A Distant Early-Warning Model of Inflation Based on M1 Disequilibria », document de travail n° 96-5, Banque du Canada.
- Banque du Canada (1984). *Rapport annuel du Gouverneur au Ministre des Finances et relevé de comptes pour l'année 1983*, Ottawa, 1984.
- Bekaert, G., R. Hodrick et D. Marshall (1997). « The Implications of First-Order Risk Aversion for Asset Market Risk Premiums », *Journal of Monetary Economics*, vol. 40, septembre, p. 3-39.
- Bell Canada Limited (1969). *Computer Analysis of Yield Curves*.
- Canova, F. et J. Marrinan (1996). « Reconciling the Term Structure of Interest Rates with the Consumption-based ICAP Model », *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 20, avril, p. 709-750.
- Crow, J. (1988). « La politique monétaire à l'œuvre au Canada », *Revue de la Banque du Canada*, février, p. 3-17.
- Day, J. et R. Lange (1997). « The Structure of Interest Rates in Canada: Information Content about Medium-Term Inflation », document de travail n° 97-10, Banque du Canada.
- Engert, W. et S. Hendry (1998). « Forecasting Inflation with the M1-VECM: Part Two », document de travail n° 98-06, Banque du Canada.
- Engert, W., S. Hendry et M. Yuan (1998). « An Investigation of Instability in the M1-VECM: A Time-varying Parameter Model », document de travail à paraître, Banque du Canada.
- Evans, M. (1998). « Real Rates, Expected Inflation, and Inflation Risk Premia », *Journal of Finance*, vol. 53, février, p. 187-218.
- Fama, E. (1990). « Term Structure Forecasts of Interest Rates, Inflation, and Real Returns », *Journal of Monetary Economics*, vol. 25, janvier, p. 59-76.
- Frankel, J. et C. Lown (1994). « An Indicator of Future Inflation Extracted from the Steepness of the Interest Rate Yield Curve Along Its Entire Length », *Quarterly Journal of Economics*, vol. 109, mai, p. 517-530.
- Hahm, J.-H. (1998). « Consumption Adjustment to Real Interest Rates: Intertemporal Substitution Revisited », *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 22, février, p. 293-320.
- Hardouvelis, G. (1988). « The Predictive Power of the Term Structure during Recent Monetary Regimes », *Journal of Finance*, vol. 43, juin, p. 339-356.
- Hendry, S. (1995). « Long-Run Demand for M1 », document de travail n° 95-11, Banque du Canada.
- Jorion, P. et F. Mishkin (1991). « A Multi-Country Comparison of Term Structure Forecasts at Long Horizons », *Journal of Financial Economics*, vol. 29, mars, p. 59-80.
- Laidler, D. et W. Robson (1993). « The Great Canadian Disinflation: The Economics and Politics of Monetary Policy in Canada, 1988-93 », Policy Study n° 19, Institut C.D. Howe.
- Longstaff, F. et E. Schwartz (1992). « Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model », *Journal of Finance*, vol. 47, septembre, p. 1259-1282.
- Lowe, P. (1992). « The Term Structure of Interest Rates, Real Activity, and Inflation », Research Discussion Paper n° 9204, Reserve Bank of Australia.
- McCulloch, J. (1971). « Measuring the Term Structure of Interest Rates », *Journal of Business*, vol. 44, janvier, p. 19-31.

- Mishkin, F. (1988). « The Information in the Term Structure: Some Further Results », *Journal of Applied Econometrics*, vol. 3, octobre-décembre, p. 307-314.
- (1990). « What Does the Term Structure Tell Us About Future Inflation? », *Journal of Monetary Economics*, vol. 25, janvier, p. 77-95.
- (1991). « A Multi-Country Study of the Information in the Shorter Maturity Term Structure About Future Inflation », *Journal of International Money and Finance*, vol. 10, mars, p. 2-22.
- Nelson, C. et A. Siegel (1987). « Parsimonious Modelling of Yield Curves », *Journal of Business*, vol. 60, octobre, p. 473-489.
- Sargent, T. (1987). *Macroeconomic Theory*, Orlando, Academic Press.
- Söderlind, P. (1995). « Forward Interest Rates as Indicators of Inflation Expectations », Discussion Paper n° 1313, Centre for Economic Policy Research.
- Söderlind, P. et L. Svensson (1997). « New Techniques to Extract Market Expectations from Financial Instruments », *Journal of Monetary Economics*, vol. 40, octobre, p. 383-429.
- Svensson, L. (1993). « Term, Inflation, and Foreign Exchange Risk Premia: A Unified Treatment », document de travail n° 4544, National Bureau of Economic Research.
- (1994a). « Monetary Policy with Flexible Exchange Rates and Forward Interest Rates as Indicators », document de travail n° 4633, National Bureau of Economic Research.
- (1994b). « Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992–1994 », Research Discussion Paper n° 1051, Centre for Economic Policy.
- (1995). « Estimating Forward Interest Rates with the Extended Nelson and Siegel Method », *Quarterly Review*, Sveriges Riksbank, vol. 3, p. 13-26.